第3章　伝達関数とブロックダイアグラム

関数と行列による回路の表記

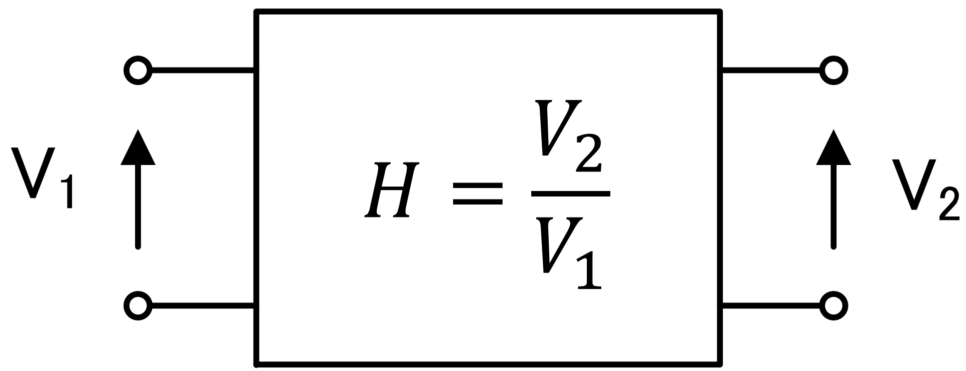
回路の関数表記

3.1 伝達関数

伝達関数 (Transfer function)

入力信号（電流または電圧）と出力信号（電流または電圧）
の関係を伝達関数Hで表す。

$$V_2 = H \cdot V_1$$



- 入出力の比で表すと、回路の機能や特性がHだけで表され、回路をブロック化することができる。
- Hは、時間変数の回路方程式（微分、積分方程式）からは求められない。しかし、sまたはω変数の回路方程式に変換すると求めることができる。
- 実は、伝達関数が、信号処理内容（計算手順）を表している（詳しくは信号処理または制御理論の科目で学ぼう）。

周波数領域の伝達関数

- 回路方程式をラプラス変換すると入力-出力の関係を表すs変数の代数方程式として伝達関数$H(s)$を求めることができる
- $s = j\omega$ $(\sigma = 0)$とすると周波数領域の伝達関数（Frequency domain transfer function）が求められる
  - 周波数領域の伝達関数は、単に周波数特性(Frequency response)とも言う

伝達関数（s変数）

$$H(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{V_{IN}(s)}$$

s-平面上で定義される（値は複素数）

$$\xrightarrow{s = j\omega\,(\sigma = 0)}$$

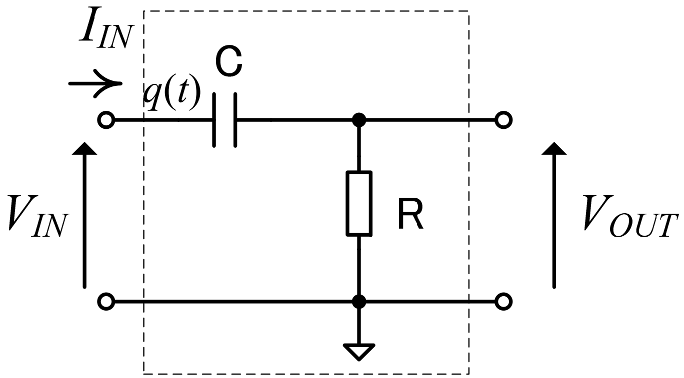
（注）ラプラス変換をせず、複素インピーダンスを用いた回路方程式から求めてもよい

周波数領域の伝達関数（ω変数）

$$H(j\omega) = \frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)}$$

$j\omega$軸上で定義される（値は複素数）

伝達関数と周波数領域の伝達関数の計算例



$$\begin{cases} v_{in}(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^{\infty} i_{in}(t)dt + Ri_{in}(t) \\ v_{out}(t) = Ri_{in}(t) \end{cases}$$

$\downarrow$ $\mathcal{L}$（初期値は、$q(t=0)=0$ と仮定）

$$\begin{cases} V_{IN}(s) = \frac{1}{C}\left(\frac{I_{IN}(s)}{s} + \frac{q(t=0)}{s}\right) + RI_{IN}(s) = \left(\frac{1}{sC} + R\right) I_{IN}(s) \\ V_{OUT}(s) = RI_{IN}(s) \end{cases}$$

複素ベクトルの計算でも
同じ関数が得られる

$$H(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{sRC}{1 + sRC} \xrightarrow{s = j\omega} H(j\omega) = \frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

分子、分母を$(1 \pm sX)$や$(1 \pm j\omega X)$の形に式変形するのがコツ（後述）

初期値の取り扱い

初期値が0ではない場合について考えてみよう。

$$\begin{cases} V_{IN}(s) = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{I_{IN}(s)}{s} + \dfrac{q(t=0)}{s}\right) + RI_{IN}(s) \\ V_{OUT}(s) = RI_{IN}(s) \end{cases}$$

$$I_{IN}(s) = \frac{V_{IN}(s)}{\frac{1}{sC} + R} - \frac{q(t=0)}{1 + sCR}$$

$$V_{OUT}(s) = \boxed{\frac{R}{\frac{1}{sC} + R}} V_{IN}(s) - \underbrace{\boxed{\frac{R}{1 + sCR}} q(t=0)}$$

初期値により発生する項（時間がたつと消える）

伝達関数

入力信号とは関係がない項。初期値をゼロ（または後章で説明するバイアス点）とすると、この項が消えて伝達関数を求めることができる。

回路の周波数特性とボーデ線図

3.2 ポールとゼロ

ポールとゼロ（pole and zero）

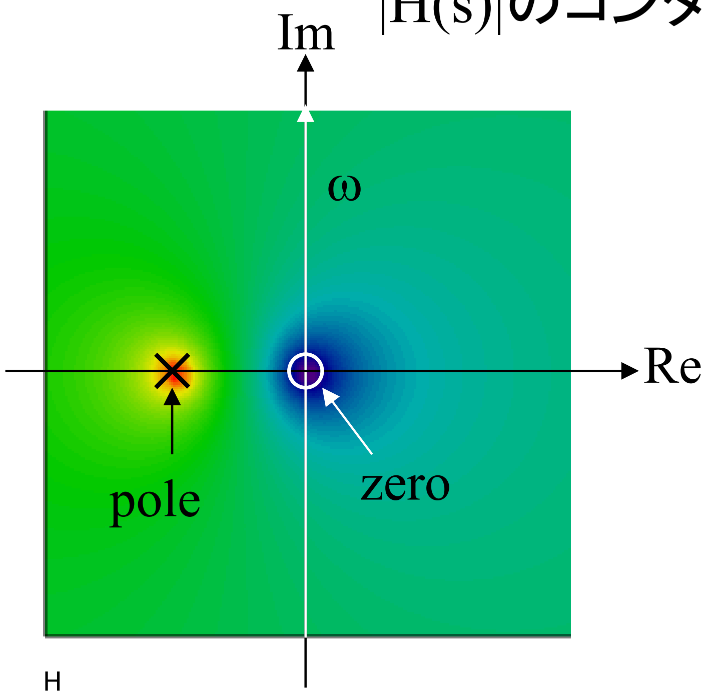
$$H(s) = \frac{a \cdot s + b}{s + c} \qquad \text{(a, b, c = 実数)}$$

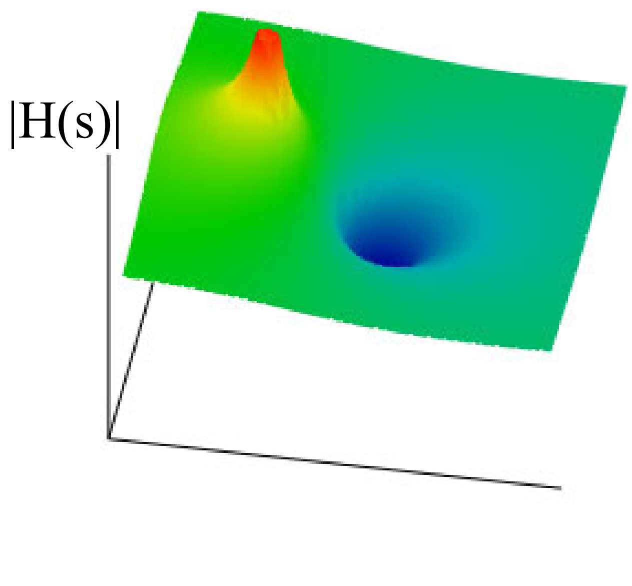
|H(s)| = 0 の点をゼロ(Zero)
|H(s)| = ∞ の点をポール(Pole)
と呼ぶ

伝達関数の形と周波数特性

$a = 0, b \neq 0$	LPF(Low-pass filter)
$a \neq 0, b = 0$	HPF(High-pass filter)

|H(s)|のコンターマップ(Contour map)



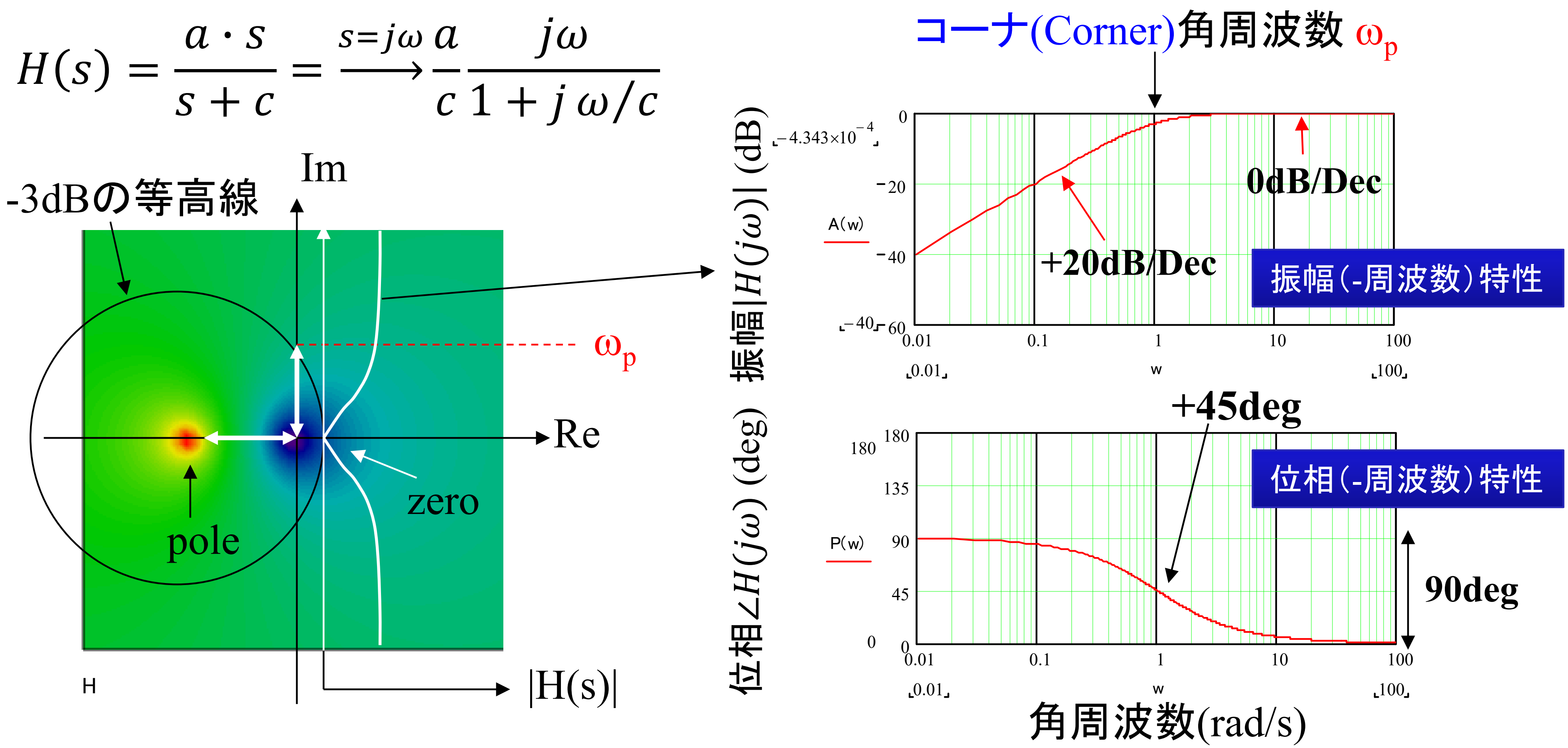


伝達関数と周波数領域の伝達関数の関係

ボーデ線図（Bode diagram）

周波数領域伝達関数の特性を振幅と位相で表したものがボーデ線図

$$H(s)=\frac{a\cdot s}{s+c}=\xrightarrow{s=j\omega}\frac{a}{c}\frac{j\omega}{1+j\,\omega/c}$$



ポールやゼロがあるとボーデ線図($j\omega$軸上)の傾きが変わる

デシベル

ボーデ線図の縦軸は、通常、デシベル(dB)で表示される。デシベルは、値の絶対値の比（信号の場合は振幅の比）を表す表記法である。

信号電圧、信号電流のデシベル　$\mathrm{dB} = 20log_{10}\left|\frac{V2}{V1}\right| = 20log_{10}|H(\omega)|$

信号電力、雑音電力のデシベル　$\mathrm{dB} = 10log_{10}\left|\frac{P2}{P1}\right|$

↑

電力の場合は、10になることに注意

（参考）無線通信などでよく使用されるdBm（ディービーエム）は、比の絶対値ではなくmWを単位とする電力を表しているので注意。

$$dBm = 10log_{10}P(mW)$$

（参考）対数関数の表記

- 高校数学では、自然対数の底は省略して$\log_e x = \log x$, 常用対数の底は省略せず$\log_{10} x$と表記している
- 工学系では、$\log_e x = \ln x, \log_{10} x = \log x, \log_2 x = \mathrm{lb}\, x$（国際表記）,または$\log_2 x = \mathrm{lg}\, x$の表記法が普及しているため、教科書や文献によって、$\log x$の意味が異なっていることに注意。
- log表記を使用する場合、対数の底を省略しないことを推奨する。

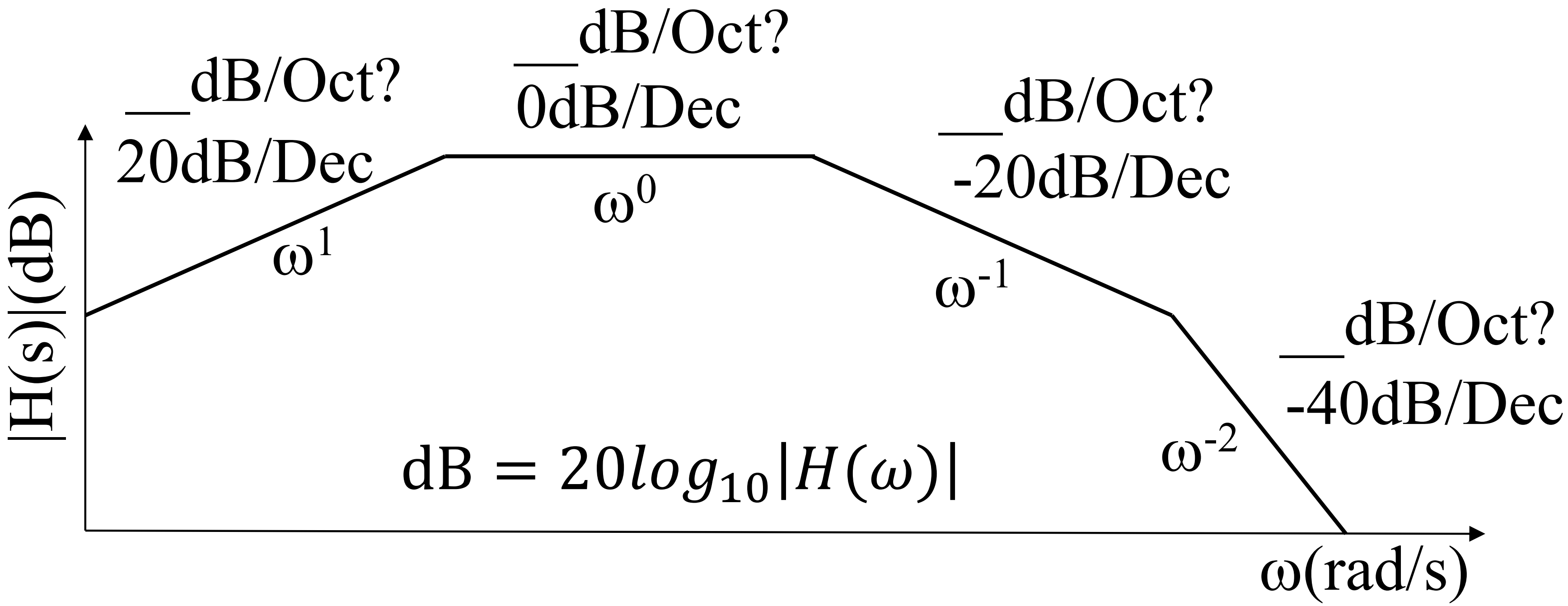
デシベルの練習

1. 増幅率100倍の増幅器の増幅率は何デシベル？
2. 増幅率1000倍の増幅器の増幅率は何デシベル？
3. 減衰率1:0.1の減衰器の減衰率は何デシベル？
4. 信号の増幅も減衰もしない回路の増幅率は何デシベル？
5. $1/\omega$ の周波数特性を持つ回路の出力は、周波数が一桁上がる毎に、何デシベル変化する？
6. $1/\omega^2$ の周波数特性を持つ回路の出力は、周波数が一桁上がる毎に、何デシベル変化する？
7. 100倍の増幅器を2回通ると、信号振幅は何デシベル増える？
8. 誤差が1%含まれているデータの誤差率は何デシベル？

ボーデ線図の傾き

ボーデ線図の振幅特性の傾きは、dB/DecまたはdB/Octで表される。

- dB/Dec:　ωが10倍になったときのdBの変化
- dB/Oct:　ωが2倍になったときのdBの変化

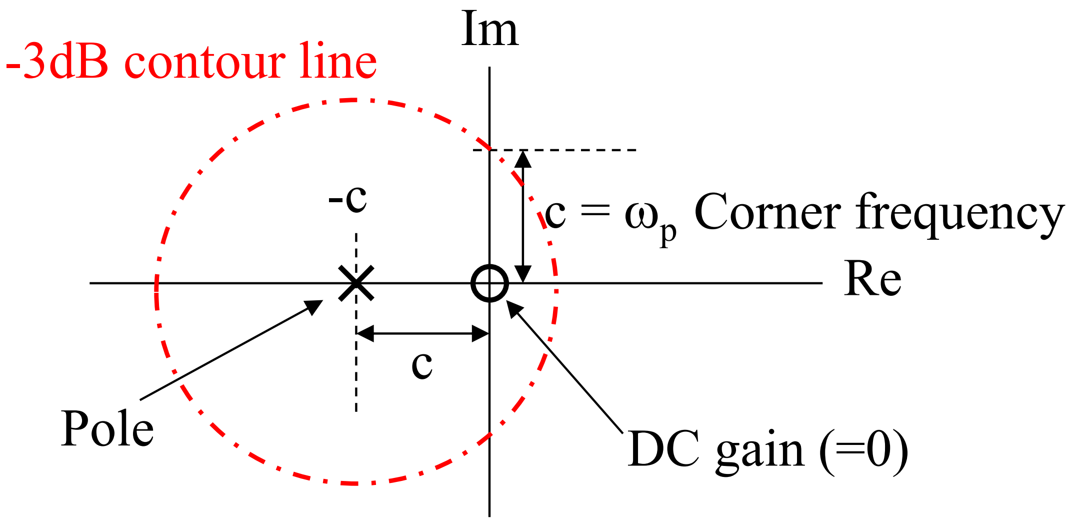


ポールとコーナ角周波数の位置関係

$$H(s) = \frac{a \cdot s}{s + c} = \frac{a}{c}\frac{s}{1 + \frac{s}{c}}$$

$$H(j\omega) = \frac{a}{c}\frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{c}}$$

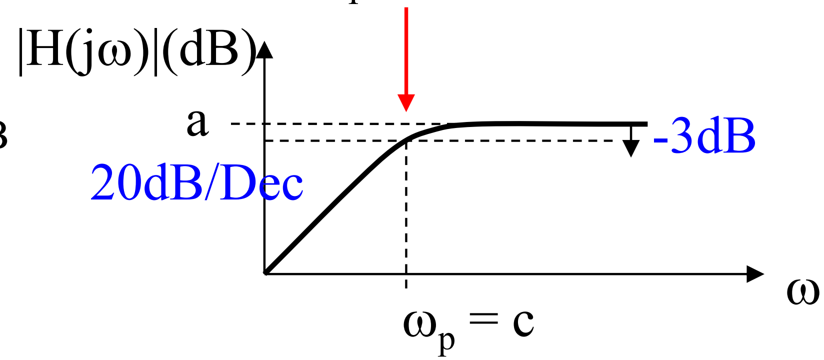
$$|H(j\omega)| = \frac{a}{c}\frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}}$$



コーナ角周波数または遮断(Cut-off)角周波数（ω_p= c）

$$\begin{cases} \omega \ll c \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{a}{c}\omega & \text{（ωに比例）} \\ \omega = c \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{2}} & \\ \omega \gg c \rightarrow |H(j\omega)| = a & \text{（定数）} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$$



（注意）ω = 0 にもゼロによるコーナがあるが横軸が対数目盛なので表示されない。

コーナ角周波数の計算

$$H(j\omega) = A(1 + j\omega B) = A\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_z}\right)$$ の場合、

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{B}$$ にゼロによるコーナが発生

振幅 $|H(\omega_z)| = A|1 + j| = \sqrt{2}A \cong A(dB) + 3dB$

位相 $\angle H(\omega_z) = \angle(1 + j) = \dfrac{\pi}{4}$

絶対値を計算するまでもない。実数と虚数のどちらを無視するかを考えればよい。

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\omega C} = \frac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$ の場合、

$$\omega = \omega_p = \frac{1}{C}$$ にポールによるコーナが発生

振幅 $\left|H(\omega_p)\right| = \dfrac{A}{|1 + j|} = \dfrac{A}{\sqrt{2}} \cong A(dB) - 3dB$

位相 $\angle H(\omega_p) = \angle\dfrac{1}{1 + j} = \angle\dfrac{1 - j}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$

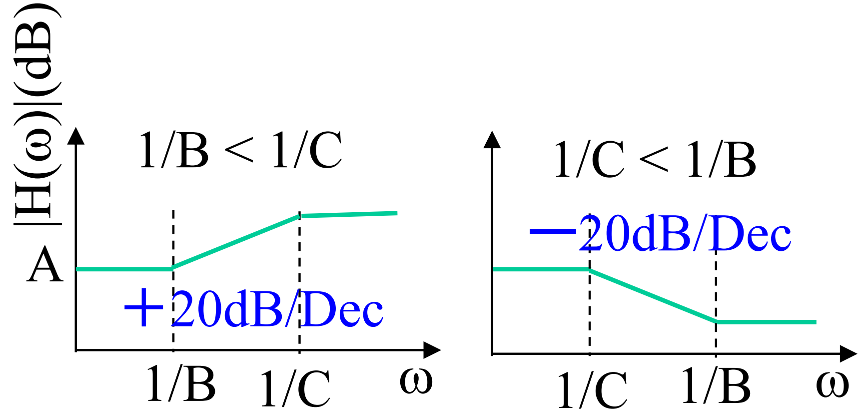
周波数特性の折れ線近似（振幅）

1-Zero, 1-Poleの例（振幅の解析）

周波数領域伝達関数の分子、分母を$(1 \pm j\omega X)$の形に因数分解すると分かり易い（因数分解できない場合もある）。

$$H(\omega) = A\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = A\frac{1 + j\omega B}{1 + j\omega C}$$

$$|H(\omega)| = A\frac{|P(\omega)|}{|Q(\omega)|} = A\frac{\sqrt{1 + \omega^2 B^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2}}$$



$P(\omega)$の特性

$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = 1 \\ \omega = \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = \sqrt{2} \ \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = \omega B \end{cases}$$

$Q(\omega)$の特性

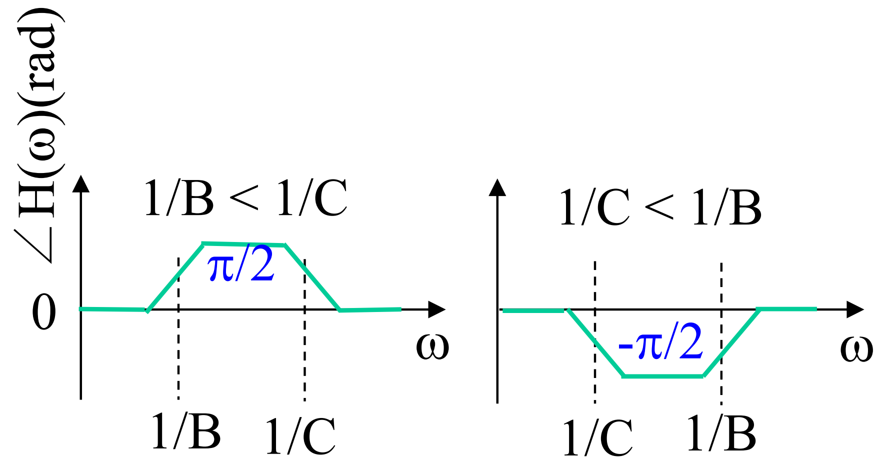
$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = 1 \\ \omega = \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = \sqrt{2} \ \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = \omega C \end{cases}$$

周波数特性の折れ線近似（位相）

1-Zero, 1-Poleの例（位相の解析）

周波数領域伝達関数の分子、分母を$(1 \pm j\omega X)$の形にすると分かり易い（できない場合もある）。

$$H(\omega) = A\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = A\frac{1 + j\omega B}{1 + j\omega C}$$
$$= \frac{A}{1 + \omega^2 C^2}(1 + j\omega B)(1 - j\omega C)$$



$P(\omega)$の特性

$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{B} & \angle P(\omega) = 0 \\ \omega = \dfrac{1}{B} & \angle P(\omega) = \dfrac{\pi}{4} \quad \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{B} & \angle P(\omega) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$Q(\omega)$の特性

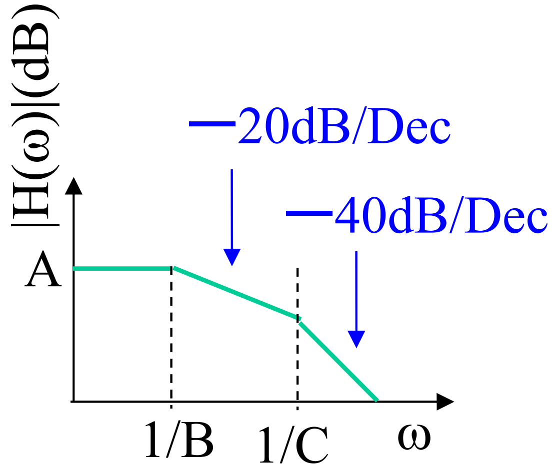
$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{C} & \angle Q(\omega) = 0 \\ \omega = \dfrac{1}{C} & \angle Q(\omega) = -\dfrac{\pi}{4} \quad \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{C} & \angle Q(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

周波数特性の折れ線近似（2ポール）

2-Poleの例

$$H(\omega) = A\frac{1}{P(\omega)Q(\omega)} = A\frac{1}{(1+j\omega B)(1+j\omega C)}$$

$$|H(\omega)| = A\frac{1}{|P(\omega)||Q(\omega)|} = A\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2B^2}\sqrt{1+\omega^2C^2}}$$



$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = 1 \\ \omega = \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = \sqrt{2}\ \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{B} & |P(\omega)| = \omega \mathrm{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega \ll \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = 1 \\ \omega = \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = \sqrt{2}\ \text{（コーナ）} \\ \omega \gg \dfrac{1}{C} & |Q(\omega)| = \omega \mathrm{C} \end{cases}$$

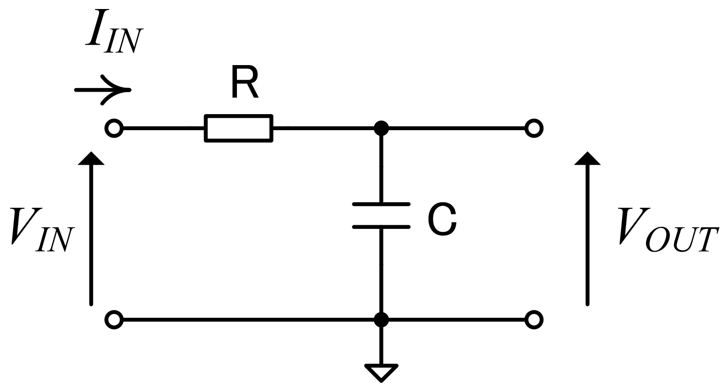
周波数特性のまとめ

グラフ	Zeroによるコーナ	Poleによるコーナ
振幅特性	傾きが+20dB変化 （反時計回り方向に折れる）	傾きが-20dB変化 （時計回り方向に折れる）
位相特性	左半面のZeroの場合 +π/2 変化 右半面のZeroの場合 -π/2 変化	左半面のPole: -π/2 変化 右半面のPole: +π/2 変化

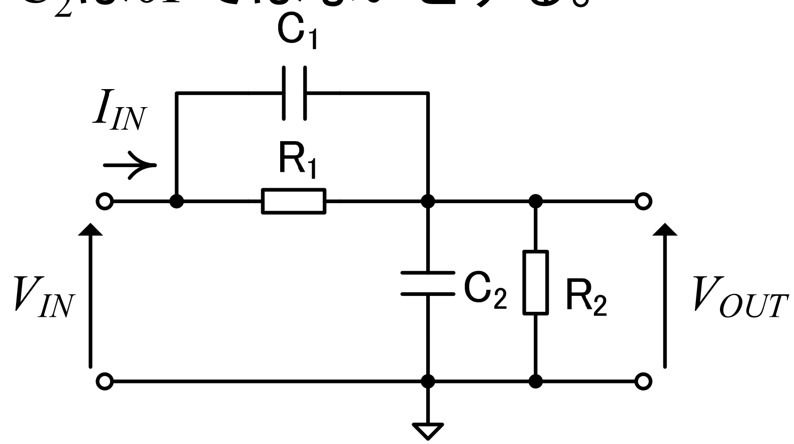
（参考）振幅特性は、コーナ周波数で傾きが変化するが、位相はコーナ周波数の前後2桁程度の範囲で値が変化する。

課題3．1

1. 下記の回路(A), (B)の周波数領域伝達関数とコーナ角周波数を求め、ボーデ線図（振幅と位相）の概略図を示せ。ただし、周波数領域伝達関数は、分子と分母を $(1+j\omega X)$ または定数の形で表すこと。
2. (B)の回路で、周波数領域伝達関数が定数となるためのC_1、C_2、R_1、R_2の条件を求めよ。ただし、C_1,、C_2は0Fではないとする。



(A)



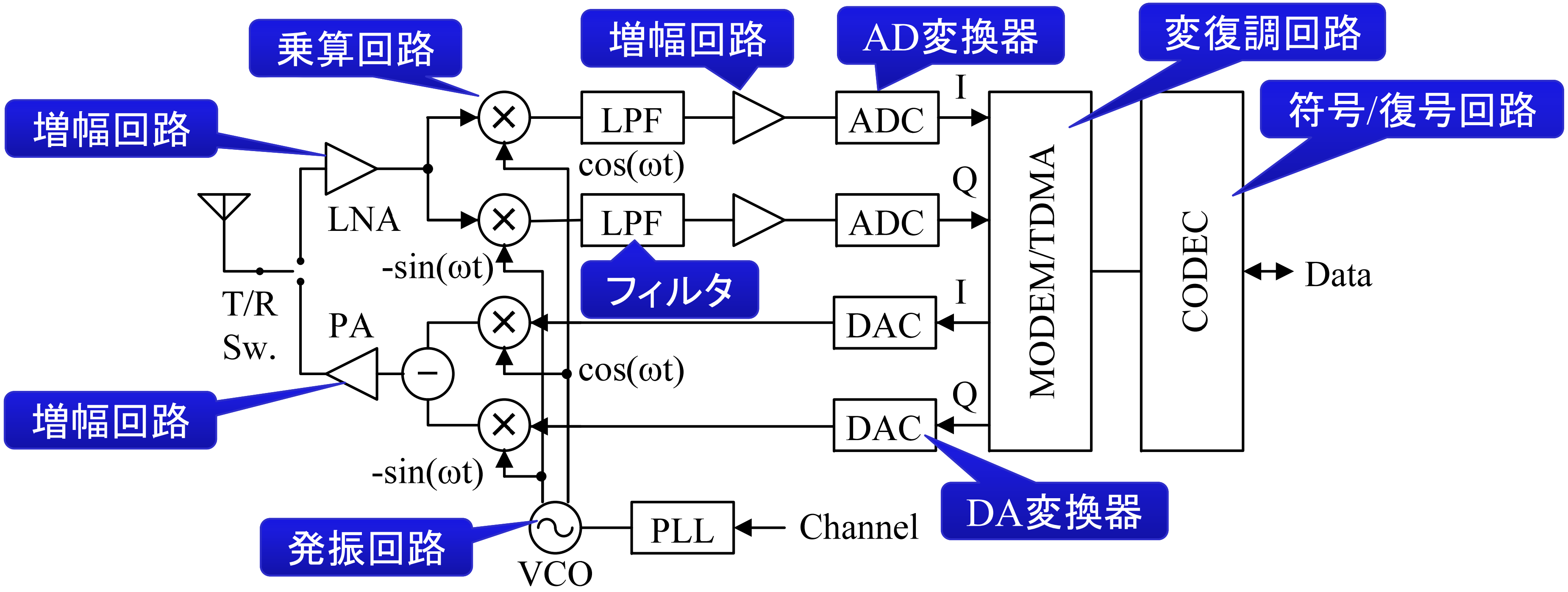
(B)

階層化された回路の表記

3.3 ブロックダイアグラム

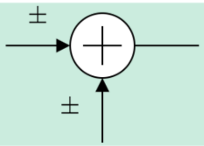
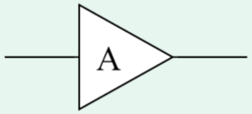
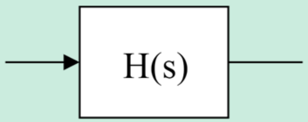
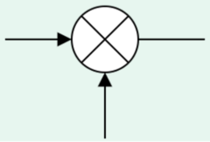
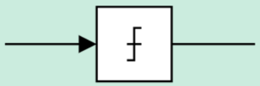
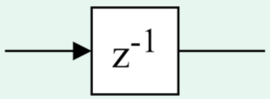
ブロックダイアグラム

- ブロックダイアグラム(Block diagram)は、回路等のシステムの表現方法として用いられる。
  - 箱や記号は伝達関数や算術演算を表す
  - 線や矢印は信号やデータの流れを表す



無線通信システムのブロックダイアグラム

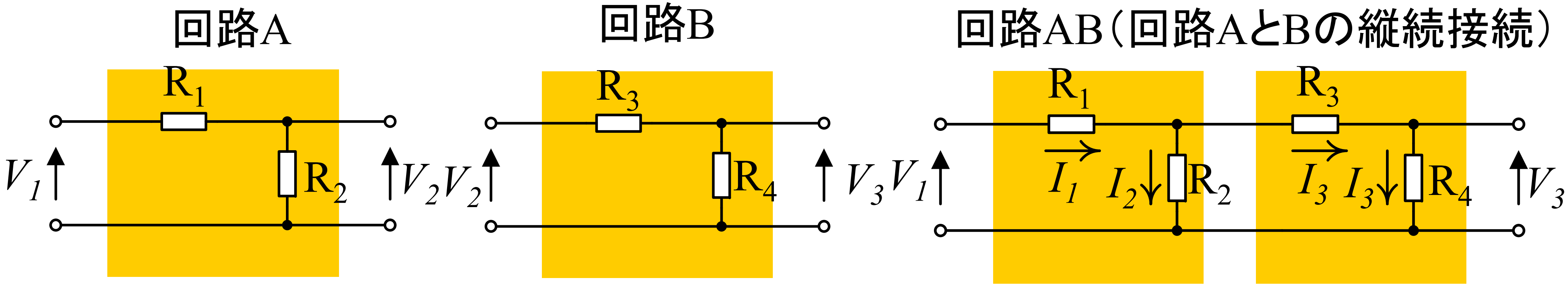
ブロックダイアグラムの主な要素

記号(Symbol)	操作(Operation)	回路(Circuit)
	加減算	加算器、減算器
	定数倍（Aを掛ける）	増幅器(Amplifier) ※ 部品としての増幅回路は増幅器と呼ぶ傾向がある
	伝達関数（H(s)を掛ける）	フィルタ等
	乗算	乗算器
	量子化	電圧比較器（Comparator）
	1クロック遅延	スイッチトキャパシタ（アナログ） Dフリップフロップ（ディジタル）

回路の行列表記

3.4 2端子対回路パラメータ

伝達関数の注意点



$$H_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad H_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \qquad H_{AB} = \frac{R_2 R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4) + R_1 R_2}$$

回路Aと回路Bを縦続接続した回路ABの伝達関数H_{AB}は、回路Aの伝達関数H_Aと回路Bの伝達関数H_Bの積にならない。

$$H_{AB} \neq H_A H_B$$

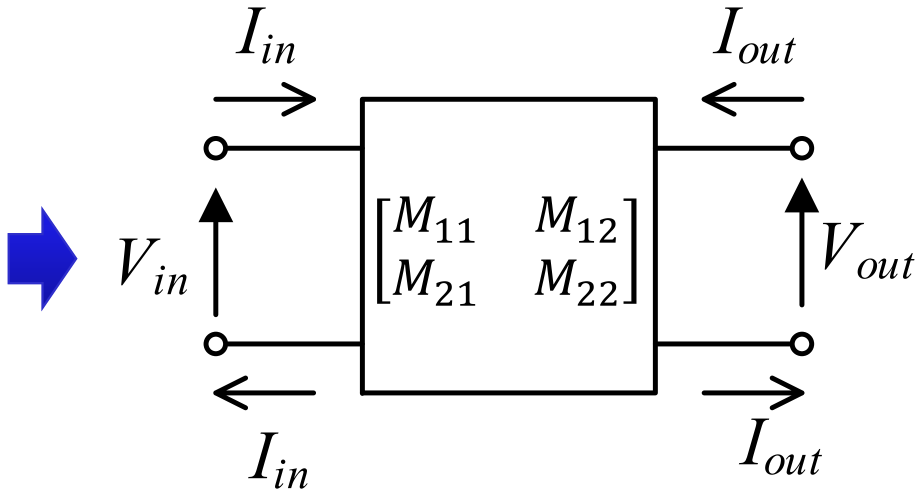
回路Aでは、$I_1 = I_2$であったが、回路ABでは、$I_1 = I_2 + I_3$になっている。この問題に対処するためには、電圧と電流を入出力変数とする必要がある。
（注）ディジタル回路では、$H_{AB} = H_A H_B$となる。

2端子対回路パラメータ

2端子対回路パラメータ(Two-terminal pair network parameters)で回路を表すための条件

- 内部に独立電源を含まない
- 線形素子で回路が構成されている
- 各ポートの流入電流と流出電流が等しい

入力ポート
(Input port)

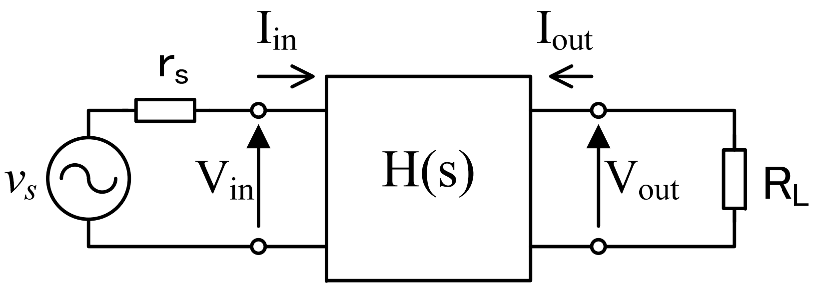


出力ポート
(Output port)

4つの変数 V_{in}, I_{in}, V_{out}, I_{out}の間の関係は、2次正方行列により表すことができる。

伝達関数と2端子対回路パラメータの違い

伝達関数

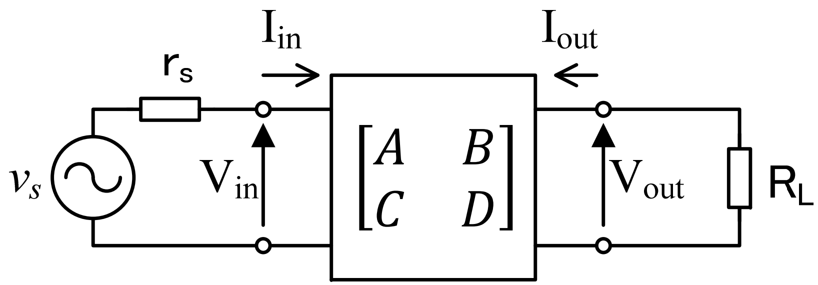


$$V_{out} = H(s)V_{in}$$

（または、$I_{out} = H(s)I_{in}$ ）

伝達関数は、電圧値または電流値の片方だけで求められるが、外部回路の特性(R_L)によって変化する。

2端子対回路パラメータ



$$\begin{bmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{bmatrix}$$

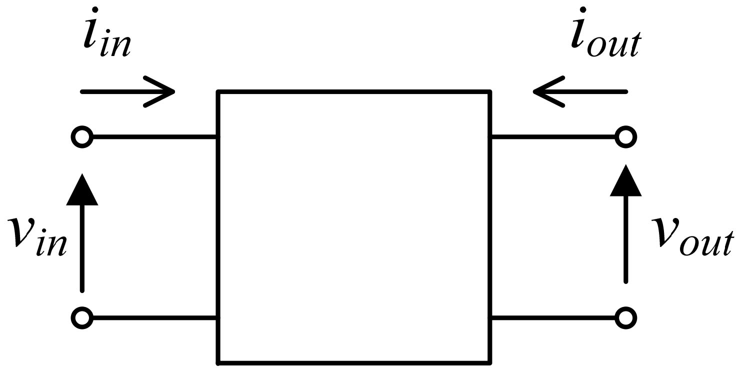
二端子対回路網パラメータは、電流と電圧の両方の値が必要だが、外部回路の影響を受けない（完全にBlack box化される）。

（参考）伝達関数とF行列

表現	主に使われる場所	適用範囲	特徴
伝達関数	ブロックダイアグラムを構成する部品	アナログ、ディジタル、ミクストシグナル（※）に対応（機械特性や光学特性もモデル化できる）	• 信号の種類を問わない • 信号源と負荷を接続した状態で求める必要がある（算出には信号源と負荷のインピーダンスが必要）
F行列	回路図を構成する部品	線形回路のみ（ディジタル、ミクストシグナルは不可）	• 入出力信号が、電流と電圧の両方 • パラメータが信号源と負荷の影響を受けない

※　アナログ信号とディジタル信号が混在した処理を行う回路

よく使用される2端子対回路パラメータ



（参考）交流信号は、sまたは$j\omega$の関数でも小文字で表記することが多い。

Yパラメータ

$$\begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix}$$

Zパラメータ

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

Hパラメータ

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix}$$

Fパラメータ

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ -i_{out} \end{bmatrix}$$

他のパラメータとi_{out}の符号が異なるので注意

Y, Z, Hパラメータの算出方法

Yパラメータ

$$y_{11} = \left.\frac{i_{in}}{v_{in}}\right|_{v_{out}=0} \quad \text{(S)}$$

$$y_{12} = \left.\frac{i_{in}}{v_{out}}\right|_{v_{in}=0} \quad \text{(S)}$$

$$y_{21} = \left.\frac{i_{out}}{v_{in}}\right|_{v_{out}=0} \quad \text{(S)}$$

$$y_{22} = \left.\frac{i_{out}}{v_{out}}\right|_{v_{in}=0} \quad \text{(S)}$$

Zパラメータ

$$z_{11} = \left.\frac{v_{in}}{i_{in}}\right|_{i_{out}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{12} = \left.\frac{v_{in}}{i_{out}}\right|_{i_{in}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{21} = \left.\frac{v_{out}}{i_{in}}\right|_{i_{out}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{22} = \left.\frac{v_{out}}{i_{out}}\right|_{i_{in}=0} \quad (\Omega)$$

Hパラメータ

$$h_{11} = \left.\frac{v_{in}}{i_{in}}\right|_{v_{out}=0} \quad (\Omega)$$

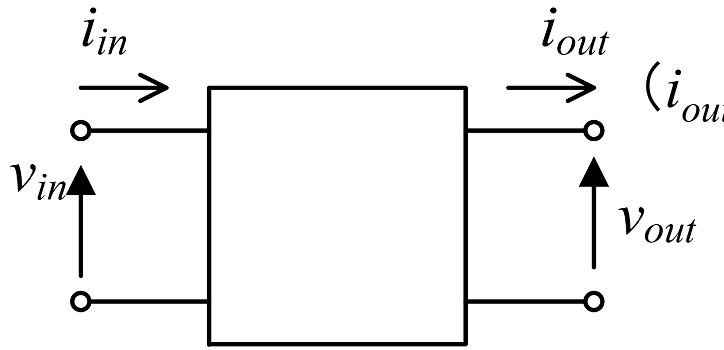
$$h_{12} = \left.\frac{v_{in}}{v_{out}}\right|_{i_{in}=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{i_{out}}{i_{in}}\right|_{v_{out}=0}$$

$$h_{22} = \left.\frac{i_{out}}{v_{out}}\right|_{i_{in}=0} \quad \text{(S)}$$

$v = 0$ 条件はポートを短絡することに相当。$i = 0$ 条件はポートを開放することに相当。

Fパラメータの算出方法



（i_{out}の向きに注意）

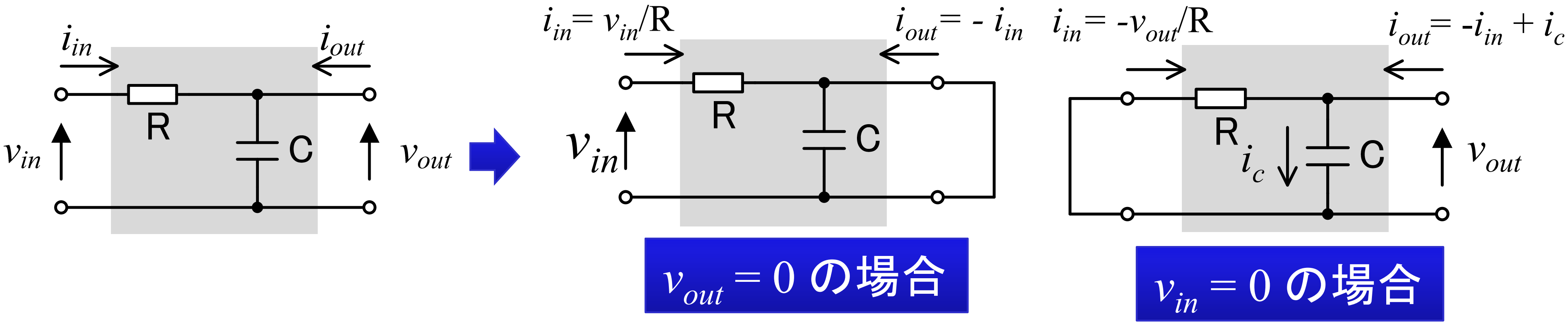
Fパラメータ

$$A = \left.\frac{v_{in}}{v_{out}}\right|_{i_{out}=0} \qquad B = \left.\frac{v_{in}}{i_{out}}\right|_{v_{out}=0} \ (\Omega)$$

$$C = \left.\frac{i_{in}}{v_{out}}\right|_{i_{out}=0} \ (\mathrm{S}) \qquad D = \left.\frac{i_{in}}{i_{out}}\right|_{v_{out}=0}$$

Yパラメータの計算例

Yパラメータは、入力ポートと出力ポートの短絡条件から求められる。



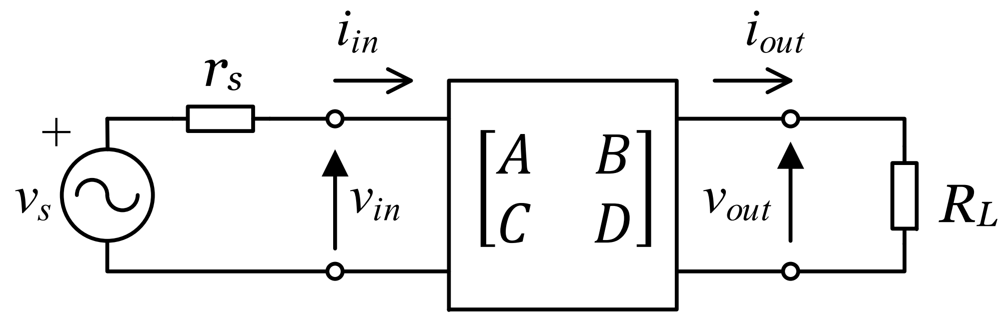
$$y_{11} = \left.\frac{i_{in}}{v_{in}}\right|_{v_{out}=0} = \frac{1}{R} \qquad y_{12} = \left.\frac{i_{in}}{v_{out}}\right|_{v_{in}=0} = -\frac{1}{R}$$

$$y_{21} = \left.\frac{i_{out}}{v_{in}}\right|_{v_{out}=0} = -\frac{1}{R} \qquad y_{22} = \left.\frac{i_{out}}{v_{out}}\right|_{v_{in}=0} = \frac{-i_{in} + i_c}{v_{out}} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

2端子対回路パラメータと伝達関数の関係

負荷を考慮することにより伝達関数が求められる。

$$v_{in} = v_s - r_s i_{in}$$



$$v_{out} = R_L i_{out}$$

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_L\text{の影響を考慮}} \begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ \dfrac{v_{out}}{R_L} \end{bmatrix}$$

$v_{in} = \left(A + \dfrac{B}{R_L}\right) v_{out}$ より、 $H(s) = \dfrac{v_{out}}{v_{in}} = \dfrac{1}{A + \dfrac{B}{R_L}}$

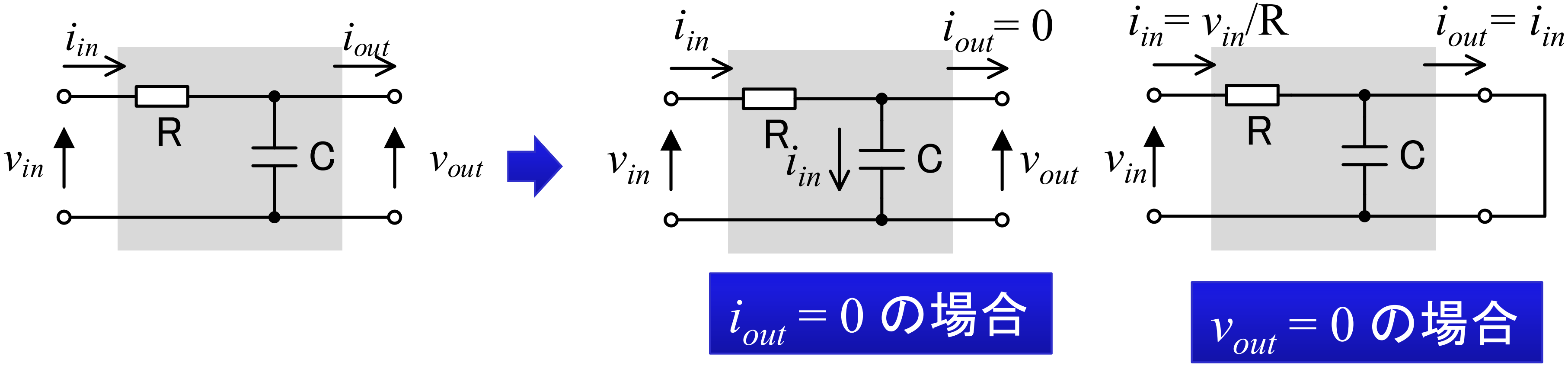
（参考）rsの影響を考慮した伝達関数 v_{out}/v_s を求める場合もある。

クイズ１

1. 前スライドの回路について、$i_{out} = 0$（出力端子開放）における周波数領域伝達関数をYパラメータで表せ。
2. 出力端子をR_L終端としたときの周波数領域伝達関数をYパラメータで表せ。

Fパラメータの計算例

Fパラメータは、出力ポートの開放条件と短絡条件から求められる。



$$A = \left.\frac{v_{in}}{v_{out}}\right|_{i_{out}=0} = \frac{v_{in}}{\dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}v_{in}} = 1 + j\omega CR \qquad B = \left.\frac{v_{in}}{i_{out}}\right|_{v_{out}=0} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_{in}}{\dfrac{1}{R}v_{in}} = R$$

$$C = \left.\frac{i_{in}}{v_{out}}\right|_{i_{out}=0} = \frac{i_{in}}{\dfrac{1}{j\omega C}i_{in}} = j\omega C \qquad D = \left.\frac{i_{in}}{i_{out}}\right|_{v_{out}=0} = \frac{i_{in}}{i_{in}} = 1$$

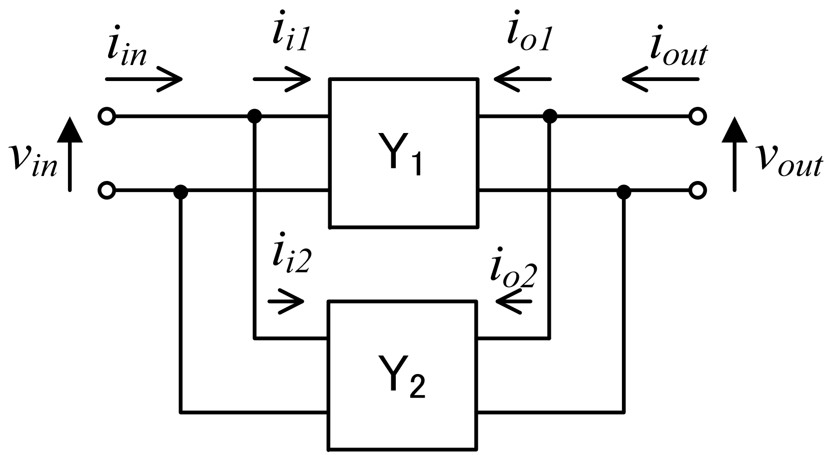
クイズ２

1. 前スライドの回路について、$i_{out} = 0$（出力端子開放）における周波数領域伝達関数をFパラメータで表せ。
2. 出力端子をR_Lで終端したときの周波数領域伝達関数をFパラメータで表せ。

回路の接続とパラメータ行列1

並列接続(Parallel connection) → Y行列の加算に相当。
直列接続(Series connection) → Z行列の加算に相当。

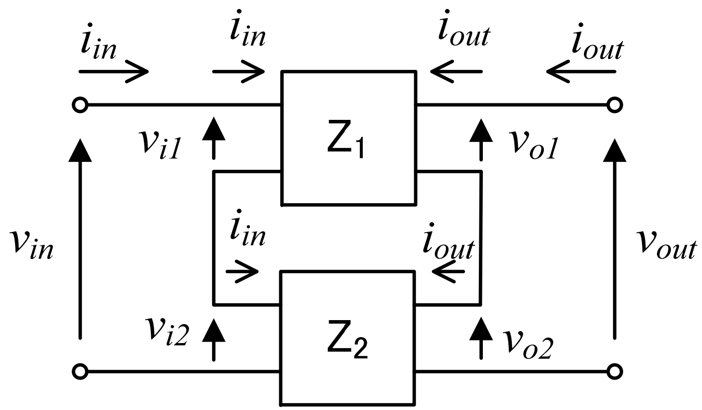
並列接続 ➡ **Y行列の加算**



$$\begin{bmatrix} i_{i1} \\ i_{o1} \end{bmatrix} = Y_1 \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_{i2} \\ i_{o2} \end{bmatrix} = Y_2 \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{i1} \\ i_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{i2} \\ i_{o2} \end{bmatrix} = (Y_1 + Y_2) \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix}$$

直列接続 ➡ **Z行列の加算**



$$\begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{o1} \end{bmatrix} = Z_1 \begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_{i2} \\ v_{o2} \end{bmatrix} = Z_2 \begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

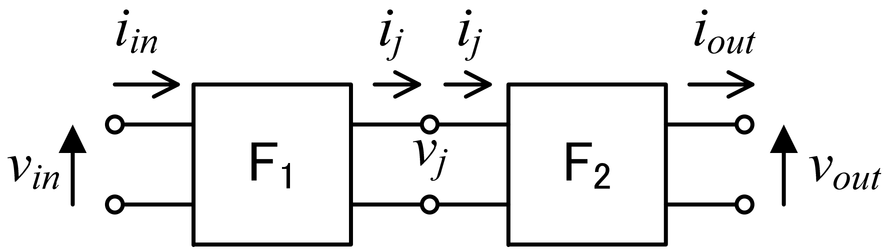
$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{i2} \\ v_{o2} \end{bmatrix}$$

$$= (Z_1 + Z_2) \begin{bmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

回路の接続とパラメータ行列2

縦続接続(Cascaded connection) → F行列の積に相当。

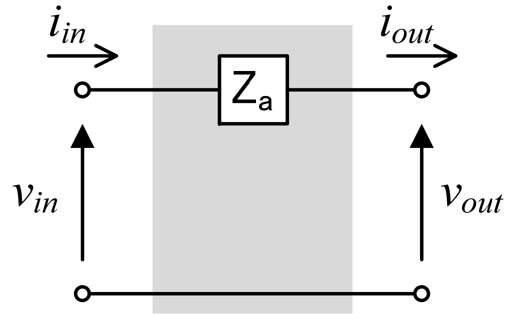
縦続接続 ➡ F行列の積



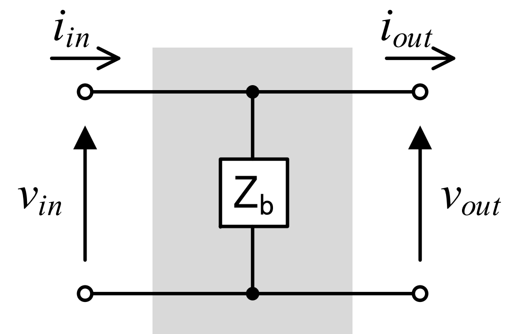
$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = F_1 \begin{bmatrix} v_j \\ i_j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_j \\ i_j \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = F_1 F_2 \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

インピーダンス1個の回路のF行列
（記憶しておくと便利）



$$\begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_b} & 1 \end{bmatrix}$$

Fパラメータの簡単な求め方

縦続接続した複数の回路に分割すると簡単な行列の積で表される。

（行列の積は順序を入れ替えられないことに注意。）

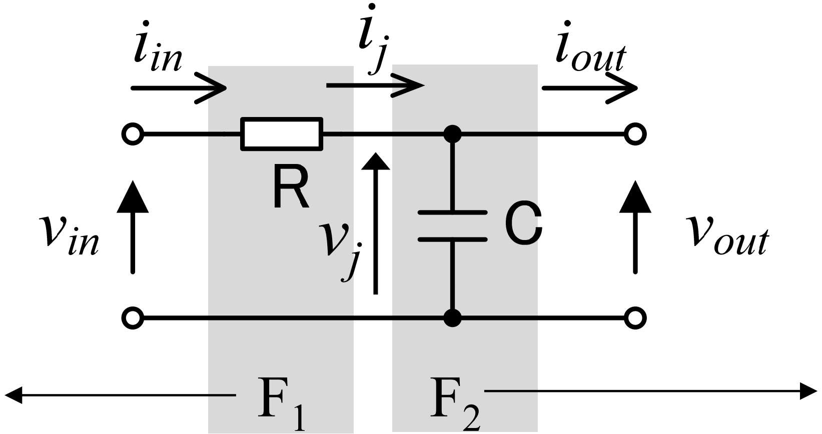
$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ i_j \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \left. \frac{v_{in}}{v_j} \right|_{i_j=0} = 1$$

$$B_1 = \left. \frac{v_{in}}{i_j} \right|_{v_j=0} = R$$

$$C_1 = \left. \frac{i_{in}}{v_j} \right|_{i_j=0} = 0$$

$$D_1 = \left. \frac{i_{in}}{i_j} \right|_{v_j=0} = 1$$



$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + j\omega CR & R \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ i_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \left. \frac{v_j}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = 1$$

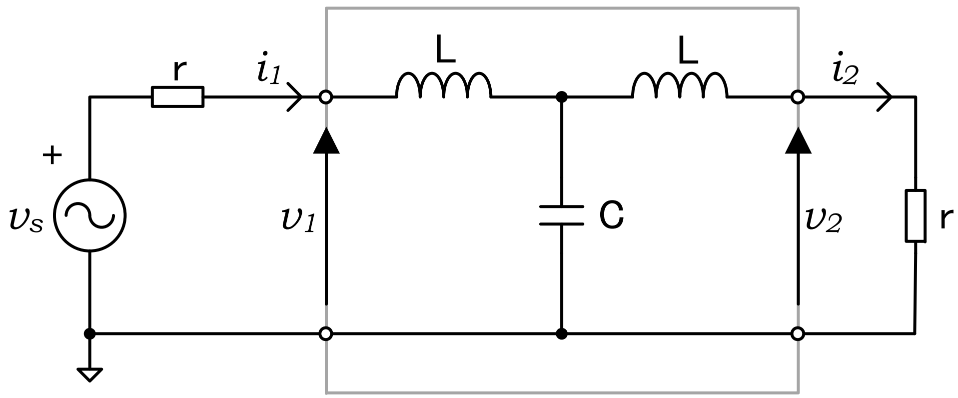
$$B_2 = \left. \frac{v_j}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = 0$$

$$C_2 = \left. \frac{i_j}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = j\omega C$$

$$D_2 = \left. \frac{i_j}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = 1$$

課題３．２

1. $s = j\omega$として、下図の四角で囲まれた回路ブロックのF行列を求めよ。ただし、sを変数として表すこと。
2. 1.で求めたF行列の要素を用いて、信号源の内部抵抗rを考慮した伝達関数$H(s) = \frac{v_2}{v_s}$を求めよ。
3. 伝達関数$H(s)$のポールを全て求めよ。（ヒント）ポールの一つは、$s = -r/L$である。
4. ポールがs平面上で、原点を中心とする半径r/Lの円周上にあるとき、L/Cとrの関係を求めよ。
5. L = 80nH, C = 64pF, r = 50Ωのとき、s平面上のポールの位置を図で示せ。



第3章のまとめ

- 回路の機能と特性はブロックダイアグラムにより表される
- 信号処理回路ブロックの機能と特性は、伝達関数により表せる
  - 伝達関数（s変数）と周波数領域伝達関数（ω変数）がある
  - 伝達関数は、信号処理の内容と回路の特性を表している
  - 伝達関数は、外部回路によって変化するので注意が必要
- 回路の周波数特性は、周波数領域伝達関数のボーデ線図により表せる
  - 横軸＝角周波数（対数目盛を使うことが多い）
  - 縦軸＝振幅（デシベルで表す）と位相（入出力間の位相差、度またはラジアン）
- ボーデ線図の振幅特性は、折れ線で近似できる
  - 折れ線が折れる角周波数は、コーナ周波数と呼ばれ、s平面上のポールとゼロの位置で決定される
  - コーナ周波数の前後で伝達関数の位相が変化する
- 線形回路は、2端子対回路パラメータにより表せる
  - 代表的な2端子対回路網パラメータに、Yパラメータ、Zパラメータ、Hパラメータ、Fパラメータなどがある
  - 2端子対回路パラメータは、外部回路の影響を受けない