第６章　ネガティブフィードバック

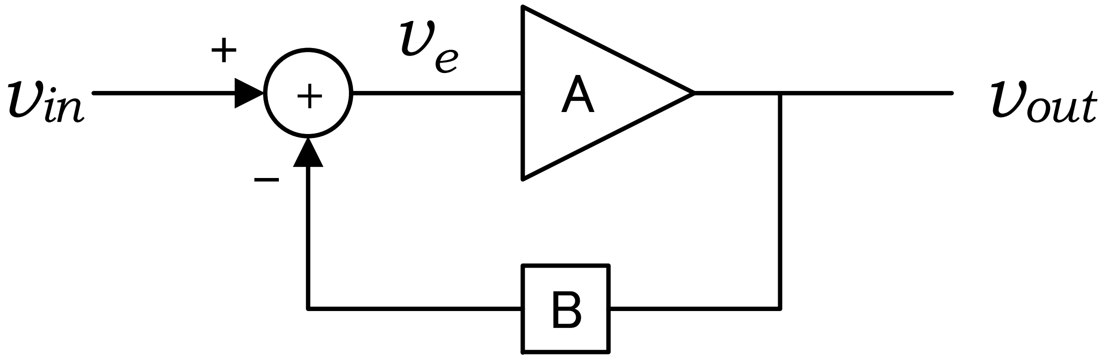
増幅器を用いた伝達関数設計

フィードバックによる増幅器特性の変更

6.1 フィードバックの効果

増幅器のフィードバック

フィードバックループを持つ増幅器のブロックダイアグラム

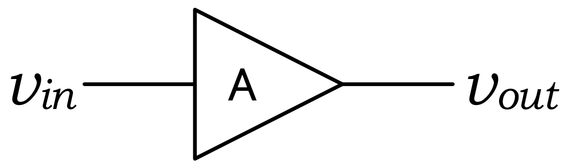


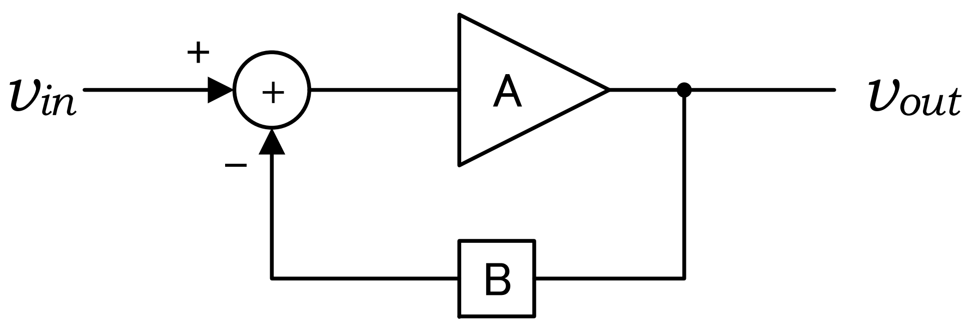
$$\begin{cases} v_e = v_{in} - Bv_{out} \\ v_{out} = Av_e \end{cases}$$

$$v_{out} = \frac{A}{1+AB} v_{in} = \frac{1}{\frac{1}{A}+B} v_{in} \xrightarrow{A\to\infty} \frac{1}{B} v_{in}$$

Aが十分大きければ、全体の利得v_{out}/v_{in}がBにより決定される。Bはv_{out}を減衰させてフィードバック量を調整するための回路なので、R, L, Cなどの安定な受動素子やインピーダンスバッファで構成する。

オープンループ利得とクローズドループ利得





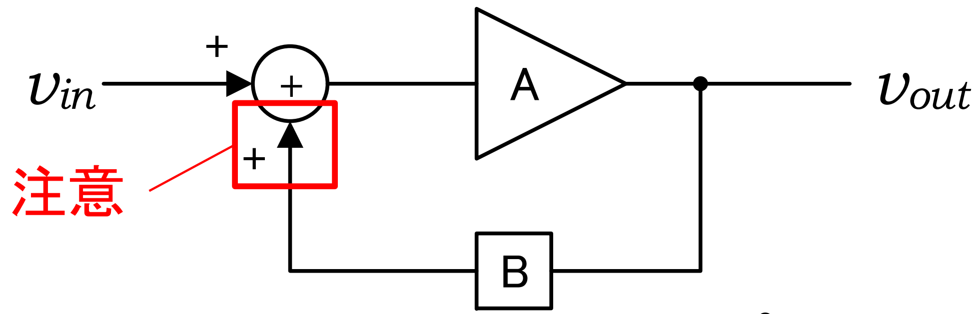
$$G_{open} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = A$$

$$G_{close} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{A}{1 + AB}$$

フィードバックしていないときの利得は、オープンループ利得（Open loop gain）と呼ばれる。

フィードバックしているときの利得は、クローズドループ利得（Closed loop gain）と呼ばれる。

正帰還と負帰還

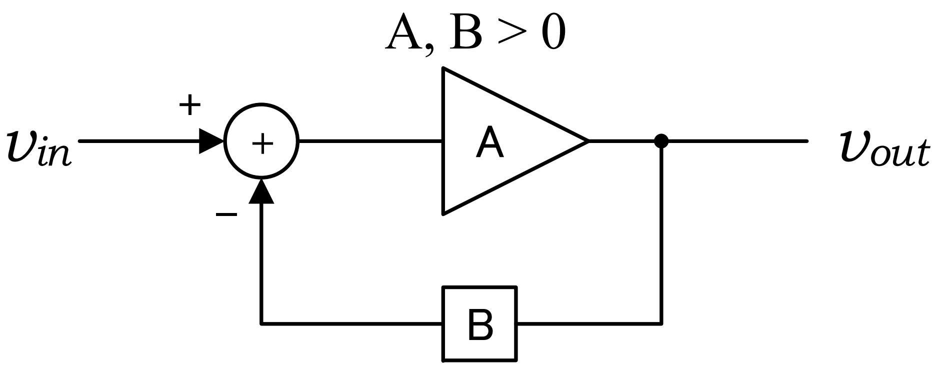


ABの値は、信号がフィードバックループを一周する間の利得に相当するためループ利得(Loop gain)と呼ばれる。ループ利得の正負は、加算器の符号も含めて考える必要があるので注意。

- AB > 0（正帰還, Positive feedback, PFB）
  - 双安定性（メモリ、基準電圧）、発振、ブートストラップなどに利用
- AB < 0（負帰還, Negative feedback, NFB）
  - 回路の安定化、特性改善、伝達関数の設計などに利用

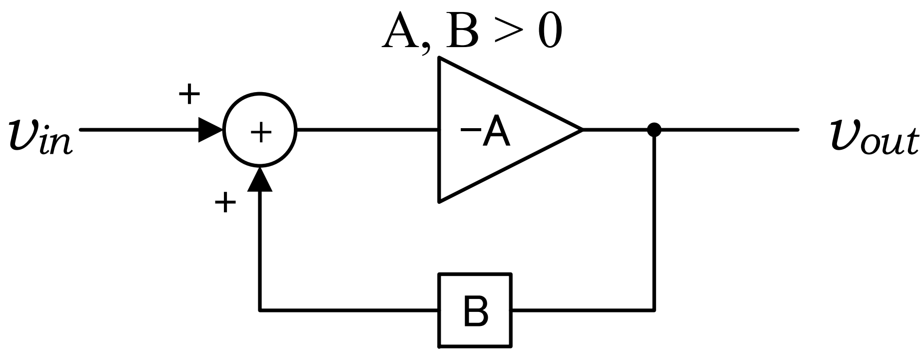
2種類のNFB

非反転増幅器のNFB



$$v_{out} = \frac{A}{1 + AB} v_{in} = \frac{1}{\frac{1}{A} + B} v_{in} \xrightarrow{A \to \infty} \frac{1}{B} v_{in}$$

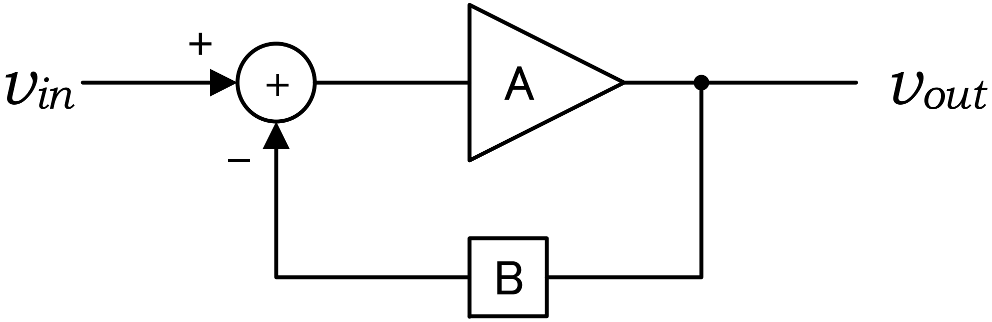
反転増幅器のNFB



$$v_{out} = \frac{-A}{1 + AB} v_{in} = \frac{-1}{\frac{1}{A} + B} v_{in} \xrightarrow{A \to \infty} -\frac{1}{B} v_{in}$$

Bに反転増幅器を用いればBが負の値になる場合も考えられるが、ここでは、Aのみに増幅器を用いる場合を考える。

NFBによる回路の安定化



$$G_{closed} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{A}{1 + AB}$$

Aの変動に対する安定指数

$$S_A = \frac{\partial G_{closed}}{\partial A} = \frac{1}{(1 + AB)^2} \xrightarrow{A \to \infty} 0$$

増幅器利得Aが大きければ、クローズドループ利得G_{closed}は、Aと関係のない値になり、Aの変動の影響がなくなる。従って、$|A|$が十分に大きければ、$|A|$はどのような値でもかまわない。

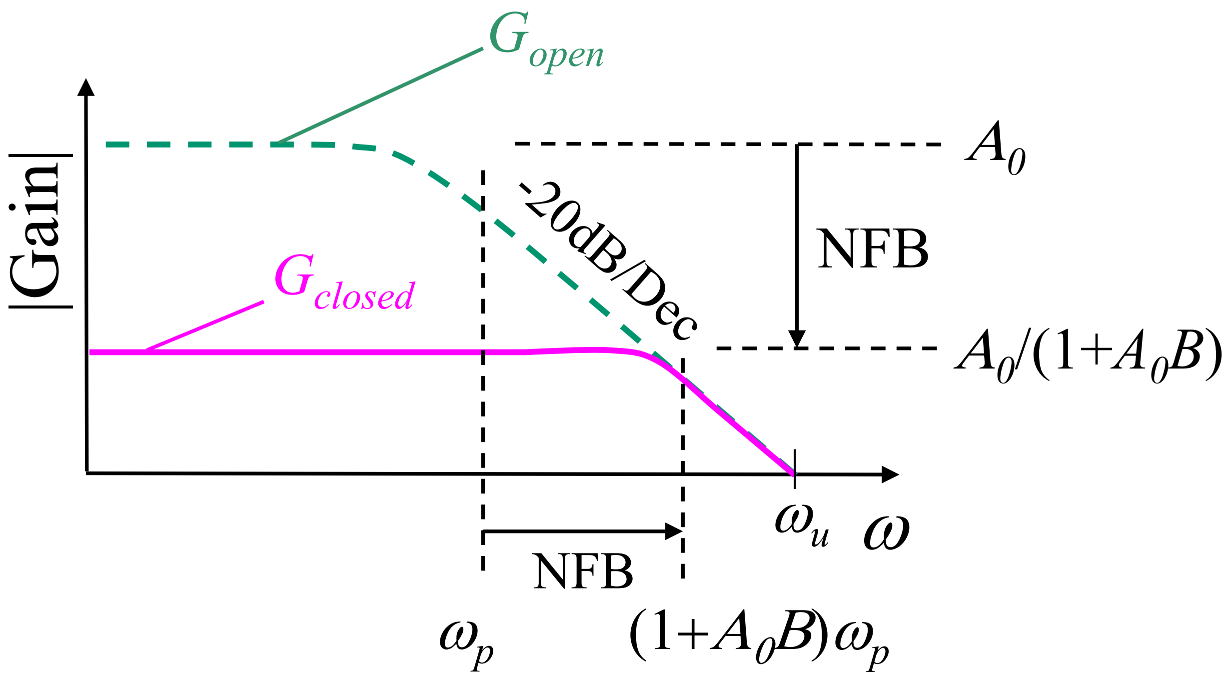
NFBによる周波数特性の設計

Open loop gain

$$G_{open}(\omega) = A = \frac{A_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

Closed loop gain

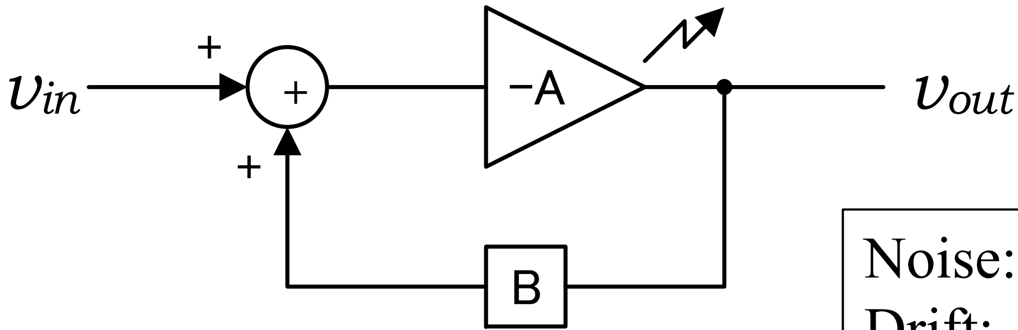
$$G_{closed} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{\dfrac{A_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}}{1 + \dfrac{A_0 B}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}} = \frac{\dfrac{A_0}{1 + A_0 B}}{1 + j\dfrac{\omega}{(1 + A_0 B)\omega_p}}$$



- Bの値により直流利得と遮断周波数が変更される
- GBPは変更されない

NFBによる誤差出力の削減

v_{error} = Noise + Drift + Distortion



Noise:	増幅器が出す雑音
Drift:	回路特性の時間変動
Distortion:	歪み

$$v_{out} = \frac{-A}{1+AB} v_{in} + \frac{1}{1+AB} v_{error} \xrightarrow{A\to\infty} -\frac{1}{B} v_{in}$$ （v_{error}が消滅）

Aが十分大きければ、増幅器の出力側で発生した雑音、ドリフト、歪みなどの誤差(v_{error})の出力を削減することができる。ただし、増幅器の入力側に発生した誤差の出力は削減できない。

（重要）利得誤差(Gain error)

実際の増幅回路は、利得が無限大ではないので、利得誤差(Gain error)が発生する。利得誤差により、信号処理の精度が下がる（回路設計目標とのずれが生じる）。

$v_{error} = 0$ のとき、

$$\begin{cases} G_i = -\dfrac{1}{B} & \text{設計値} \\ G_r = -\dfrac{A}{1+AB} & \text{実際の利得} \end{cases}$$

（数値例）
Gi = 10dB, A = 130dBのとき、
誤差率は、-120dB = 10^{-6} = 0.0001%

利得誤差率 $$R_{error} = \frac{G_r - G_i}{G_i} = \frac{-1}{1+AB} \cong \frac{-1}{AB} = \frac{G_i}{A} = G_i(dB) - A(dB)$$

Aが大きいほど、誤差率が小さくなる。

GBPと信号処理精度の関係

$$A(f) = |Gain| = \frac{GBP}{f}$$

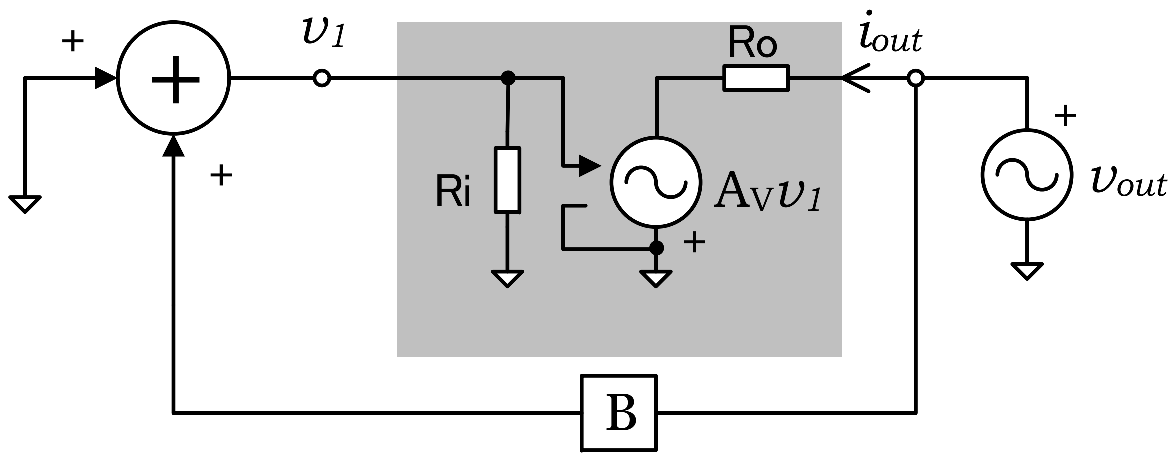
$$R_{error} = \frac{G_r - G_i}{G_i} = \frac{G_i}{A} = \frac{G_i f}{GBP}$$

遮断周波数より高周波で、
- 誤差率は、周波数 f に比例して大きくなる
- 誤差率は、GBPに反比例して小さくなる

GBPが信号処理回路の精度を決定している

（参考）遮断周波数および直流利得はNFBにより変更できるが、GBPはNFBで変更できないため、GBPは増幅回路の本質的な性能を表している。

電圧フィードバックによる出力インピーダンスの変更



出力インピーダンス測定回路

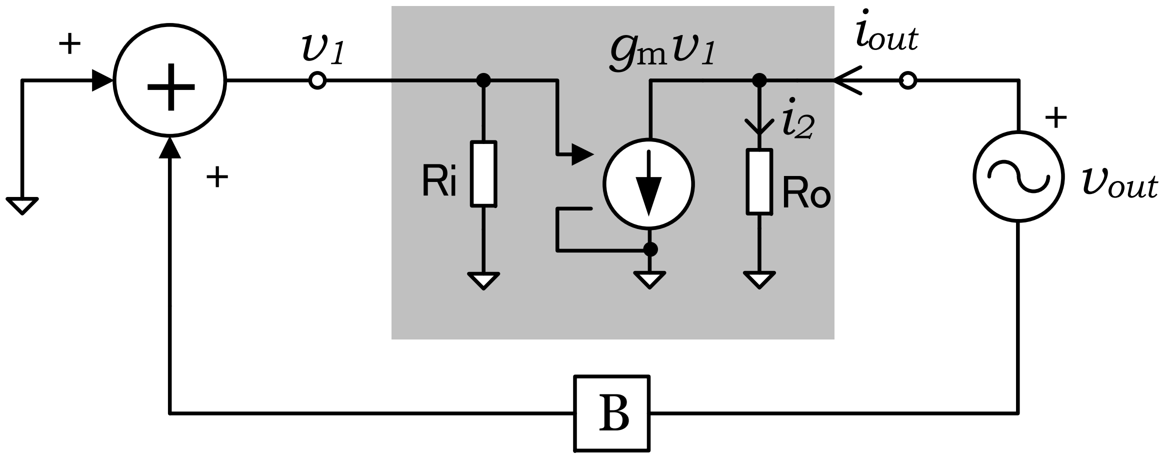
$$\begin{cases} v_1 = \mathrm{B} v_{out} & \text{（電圧帰還）} \\ v_{out} = R_o i_{out} - \mathrm{A_V} v_1 \end{cases}$$

$$v_{out} = R_o i_{out} - \mathrm{A_V B} v_{out}$$

$$Z_{out} = \frac{v_{out}}{i_{out}} = \frac{R_o}{1 + \mathrm{A_V B}}$$

出力インピーダンスは$1/(1 + A_V B)$倍に下がる。

電流フィードバックによる出力インピーダンスの変更



出力インピーダンス測定回路

$$\begin{cases} v_1 = -\mathrm{B} i_{out} & \text{（電流帰還）} \\ i_2 = \dfrac{v_{out}}{R_o} \\ i_{out} = i_2 + g_m v_1 \end{cases}$$

$$Z_{out} = \frac{v_{out}}{i_{out}} = R_o(1 + g_m \mathrm{B})$$

出力インピーダンスは$(1 + g_m B)$倍に上がる。

（参考）同様の考え方で、入力インピーダンスを制御することもできる。

増幅器の安定化

6.2 位相補償

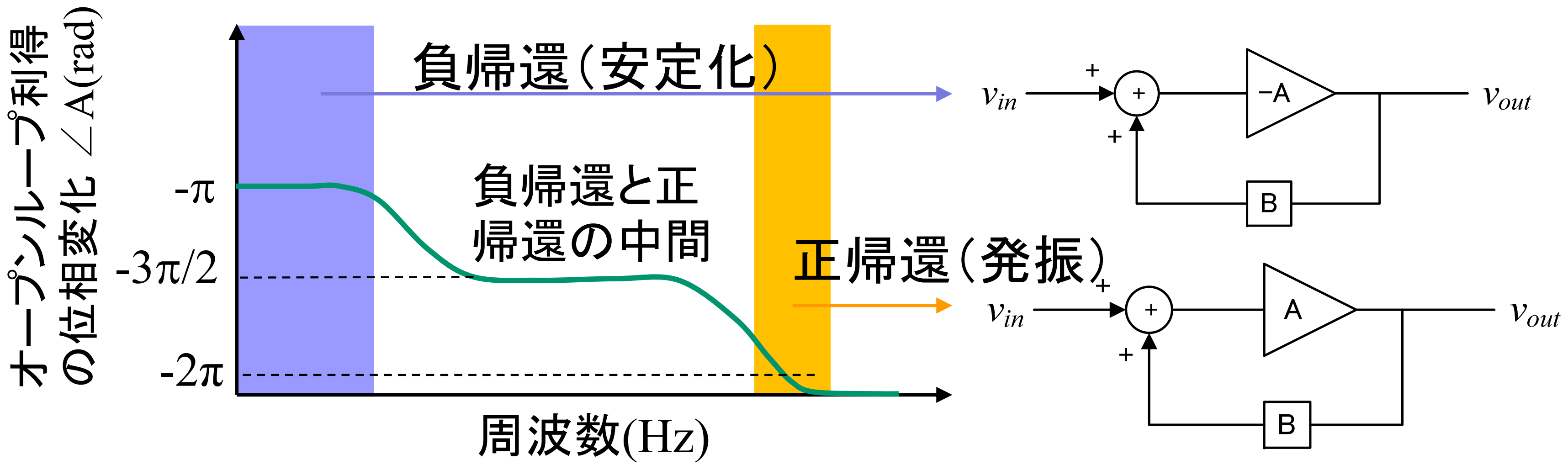
周波数特性のある増幅回路のフィードバック

増幅回路にNFBを加えることで、増幅回路の利得を決定したり、色々な機能を作り出せるが、下記の問題を起こす可能性もある。

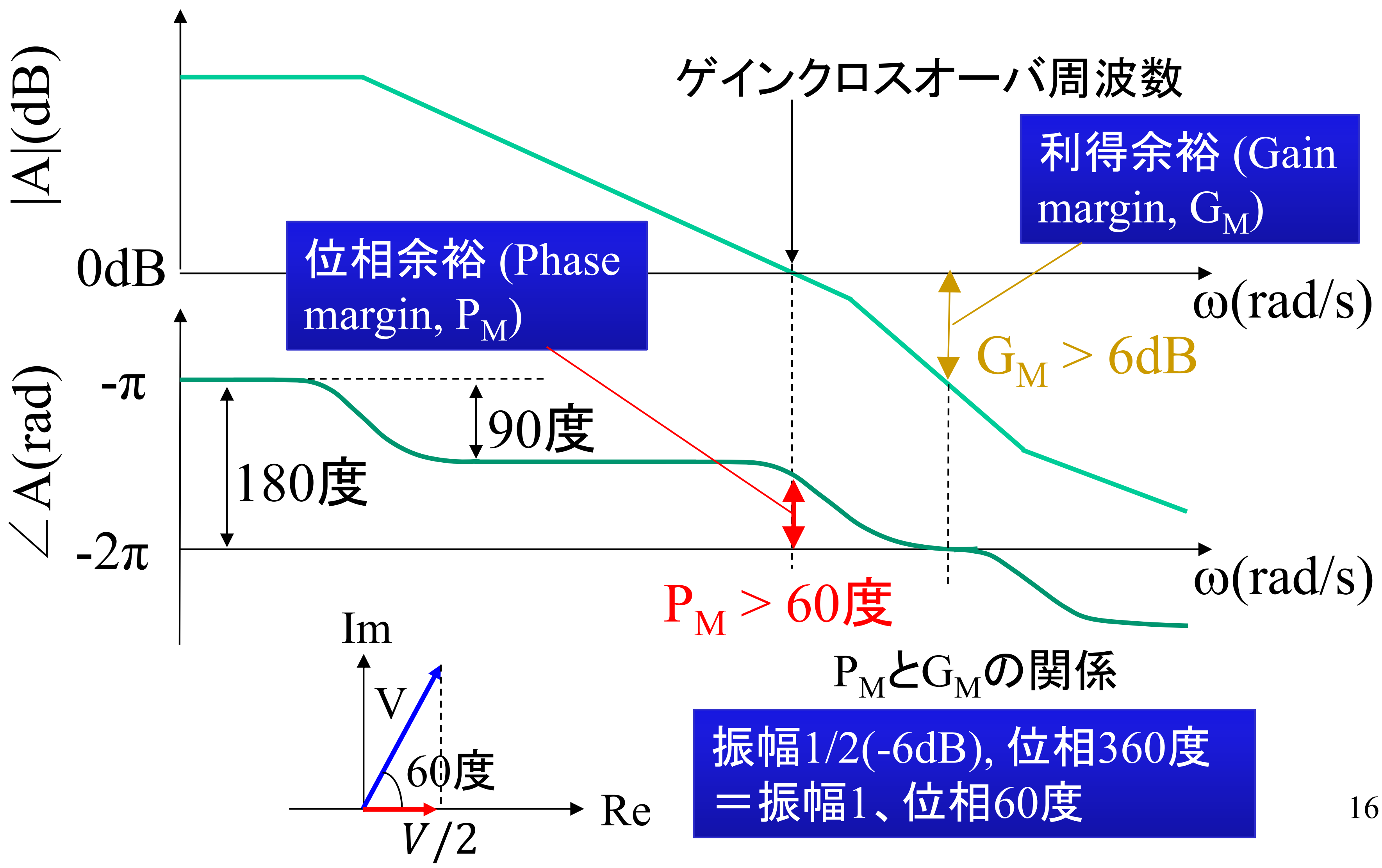
- 予期しない不安定化（＝定常状態になるまでに時間がかかる）
- 予期しない発振（＝入力信号がなくても出力が出てしまう）

周波数によってNFBになったりPFBになったりすることが原因なので、
周波数の変化によるループ利得の変化が180度を超えないようにする。

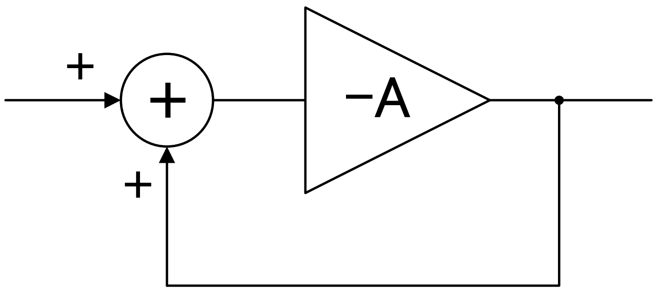
増幅回路の周波数特性（位相）→ 正/負帰還が同時に発生→動作異常



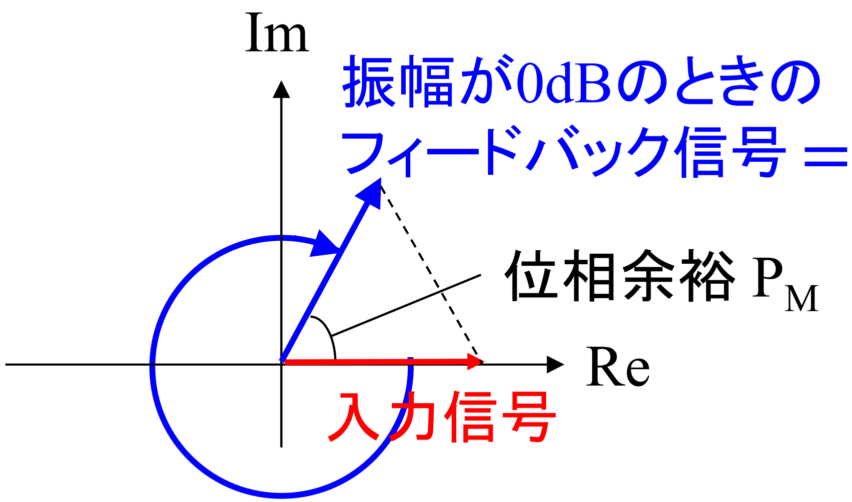
安定な増幅器の条件


|A|(dB)
0dB
ゲインクロスオーバ周波数
利得余裕 (Gain margin, G_M)
位相余裕 (Phase margin, P_M)
ω(rad/s)
G_M > 6dB
∠A(rad)
-π
-2π
90度
180度
ω(rad/s)
P_M > 60度
Im
V
60度
Re
$V/2$
P_MとG_Mの関係
振幅1/2(-6dB), 位相360度
＝振幅1、位相60度

位相余裕 $\geq \pi/3$ radの必要性



B = 1 (100%フィードバック)



$$-A = e^{jP_M}$$

$$G(\omega_u) = \frac{-A}{1+A} = \frac{-1}{1+\frac{1}{A}} = \frac{-1}{1-e^{-jP_M}}$$

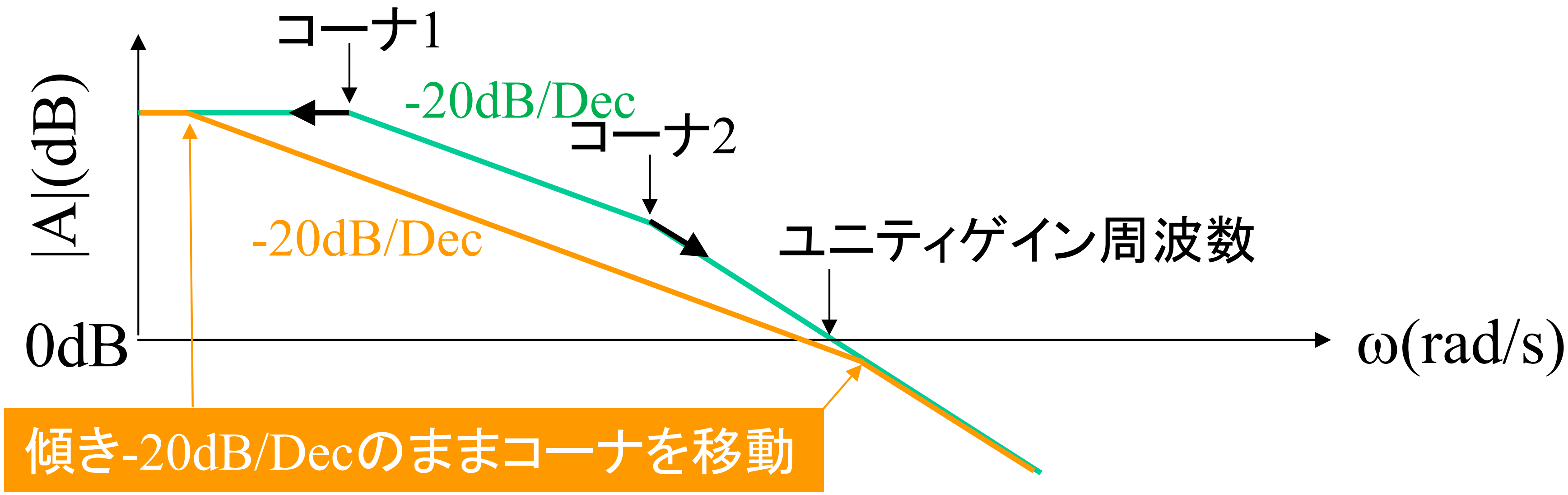
$|G(\omega_u)| \leq 1$（フィードバックによって出力振幅が増加しない）ためには、

$$\left|1-e^{-jP_M}\right| \geq 1$$

$$\left|1-e^{-jP_M}\right| = \left|1-e^{-jP_M}\right| = |1-\cos P_M + j\sin P_M|$$
$$= \sqrt{(1-\cos P_M)^2 + (\sin P_M)^2} = \sqrt{2-2\cos P_M} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \cos P_M \leq 1$$

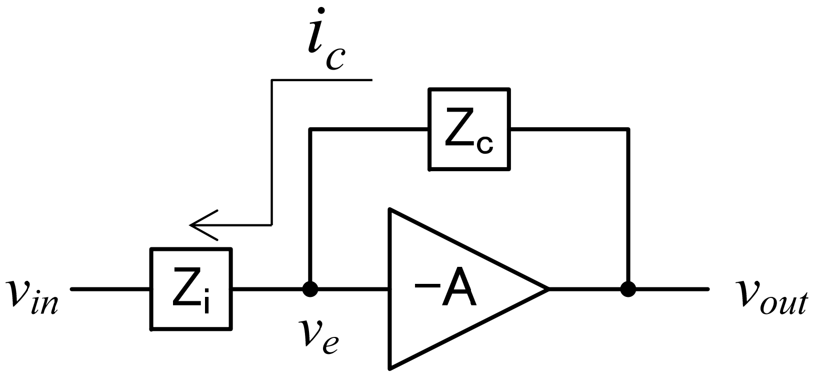
位相補償

コーナ1個当たり90度の位相変化が起こる。2段以上の増幅回路は、各段でコーナを1個以上持ち、全体で180度以上の位相変化が起こる可能性があるので、位相余裕または利得余裕を残すための仕組みとして位相補償(Phase compensation)を行う。



位相補償にはいろいろな方法がある。ここでは、簡便なフィードバックによるコーナの移動を説明する。

位相補償の例1



利得 = -A の増幅回路のコーナを変更するためZ_iとZ_cで、出力信号をフィードバックする（一般的にフィードバックは、伝達関数の分母の形に影響を与える）。

$$A = \frac{A_0}{(1 + j\,\omega/\omega_{p1})\,(1 + j\,\omega/\omega_{p2})} \longleftarrow \text{コーナが2個}$$

$$\begin{cases} v_e - v_{in} = Z_i i_c \\ v_{out} - v_e = Z_c i_c \\ v_{out} = -A v_e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i_c = \frac{1}{Z_c}\left(1 + \frac{1}{A}\right) v_{out} \cong \frac{1}{Z_c} v_{out} \quad (A \gg 1)$$

$$Gain = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-A}{1 + \frac{Z_i}{Z_c} A} = \frac{-A_0}{(1 + j\,\omega/\omega_{p1})\,(1 + j\,\omega/\omega_{p2}) \underbrace{\boxed{+ \frac{Z_i}{Z_c} A_0}}_{\text{追加}}}$$

位相補償の例2

$$Gain = \frac{-A_0}{(1 + j\,\omega/\omega_{p1})\,(1 + j\,\omega/\omega_{p2}) + \frac{Z_i}{Z_c} A_0}$$

$$= \frac{-A_0}{1 + j\omega\left(\frac{1}{\omega_{p1}} + \frac{1}{\omega_{p2}}\right) - \frac{\omega}{\omega_{p1}}\frac{\omega}{\omega_{p2}} + \frac{Z_i}{Z_c} A_0}$$

ωの次数（ボーデ線図の傾き）を変えないでω$_{p2}$をx倍に変更

$$= \frac{-A_0}{1 + j\omega\left(\frac{1}{\omega_{p1}/x} + \frac{1}{\omega_{p2}\cdot x}\right) - \frac{\omega}{\omega_{p1}}\frac{\omega}{\omega_{p2}} + j\omega\left(\frac{1-x}{\omega_{p1}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\omega_{p2}}\right) + \frac{Z_i}{Z_c} A_0}$$

従って、 $j\omega\left(\frac{1-x}{\omega_{p1}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\omega_{p2}}\right) + \frac{Z_i}{Z_c} A_0 = 0$ とすればよい。

$Z_i = R_i,\quad Z_c = \frac{1}{j\omega C_c}$ のとき、 $\frac{Z_i}{Z_c} A_0 = j\omega C_c R_i A_0 = -j\omega\left(\frac{1-x}{\omega_{p1}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\omega_{p2}}\right)$

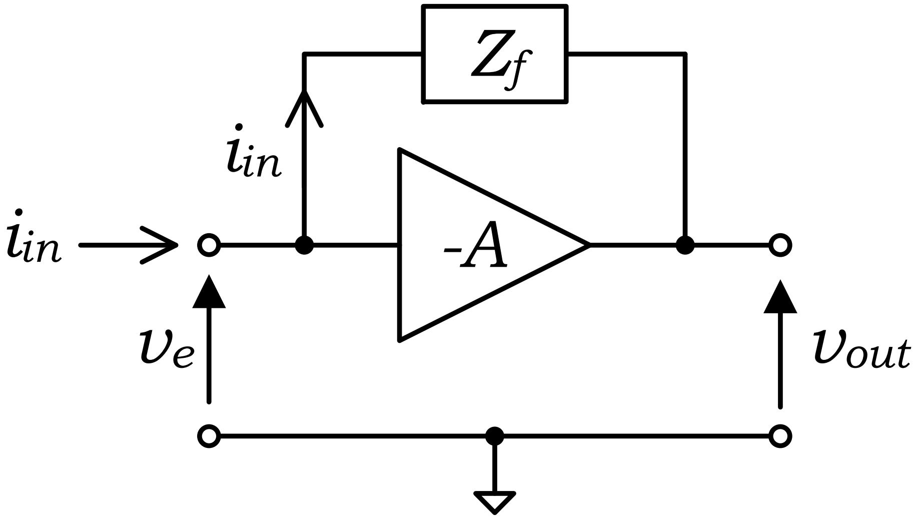
（クイズ）位相補償回路の設計

ω_{p1} = 1MEGrad/s, ω_{p2} = 10MEGrad/s, A_0 = 40dB, R_i = 3.7MEGΩの増幅回路のコーナを変更する。ω_{p2} = 100MEGrad/sにするためには、C_cを何F（ファラッド）にすればよいか。

NFBを用いた回路の設計例

6.3 伝達関数による回路設計

負帰還増幅器の入力電圧



入力インピーダンス≈ ∞
電圧利得≈ ∞

$$\begin{cases} v_e = Z_f i_{in} + v_{out} \\ v_{out} = -A v_e \end{cases}$$

$$v_e = Z_f i_{in} - A v_e$$

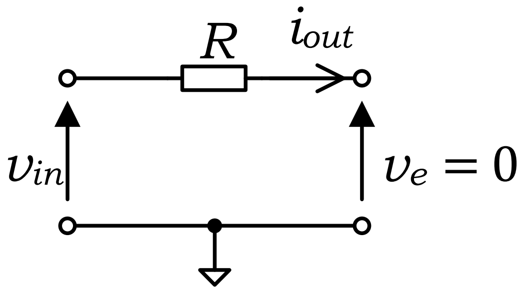
$$v_e = \frac{Z_f}{1+A} i_{in} \xrightarrow{A\to\infty} 0$$

高利得の増幅器にNFBを行うと、増幅器の入力ポートをGNDに接続しなくても、自動的に$v_e = 0$となる。直流電圧でも成り立つ場合は仮想短絡(Virtual short)と呼ばれる。（Virtual shortは電子回路及び演習C、Dで詳しく扱う。）

定数倍と微分

（注意）以下の回路は、出力ポートに負帰還した増幅器を接続することを前提として、$v_e = 0$とする。

電圧-電流変換



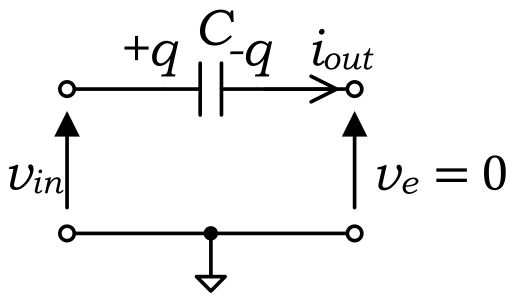
$$v_{in} = Ri_{out} + v_e = Ri_{out}$$

$$i_{out} = \frac{1}{R} v_{in}$$

入力電圧を電流に変換して出力

（変換係数 $\frac{1}{R}$）

微分電圧-電流変換



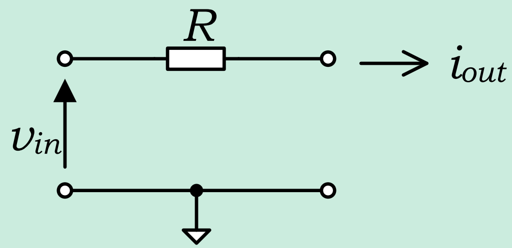
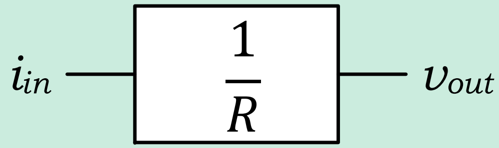
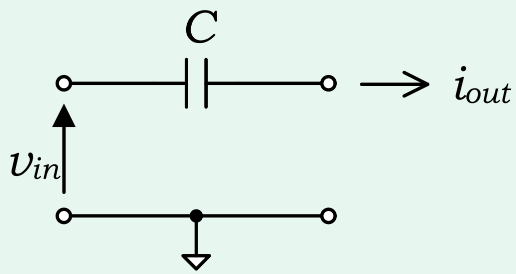
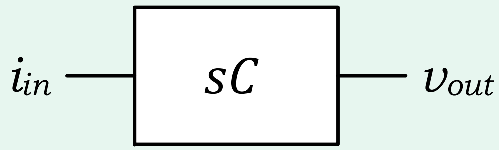
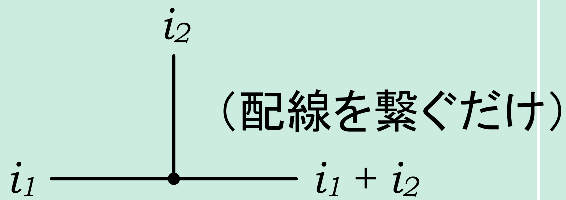
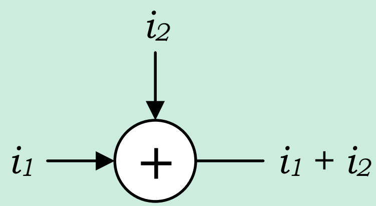
$$q(t) = \int_0^t i_{out}(\tau)\, d\tau = Cv_{in}(t)$$

$$i_{out} = C\frac{dv_{in}(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} i_{out}(s) = sCv_{in}(s)$$

入力電圧を微分して電流を出力

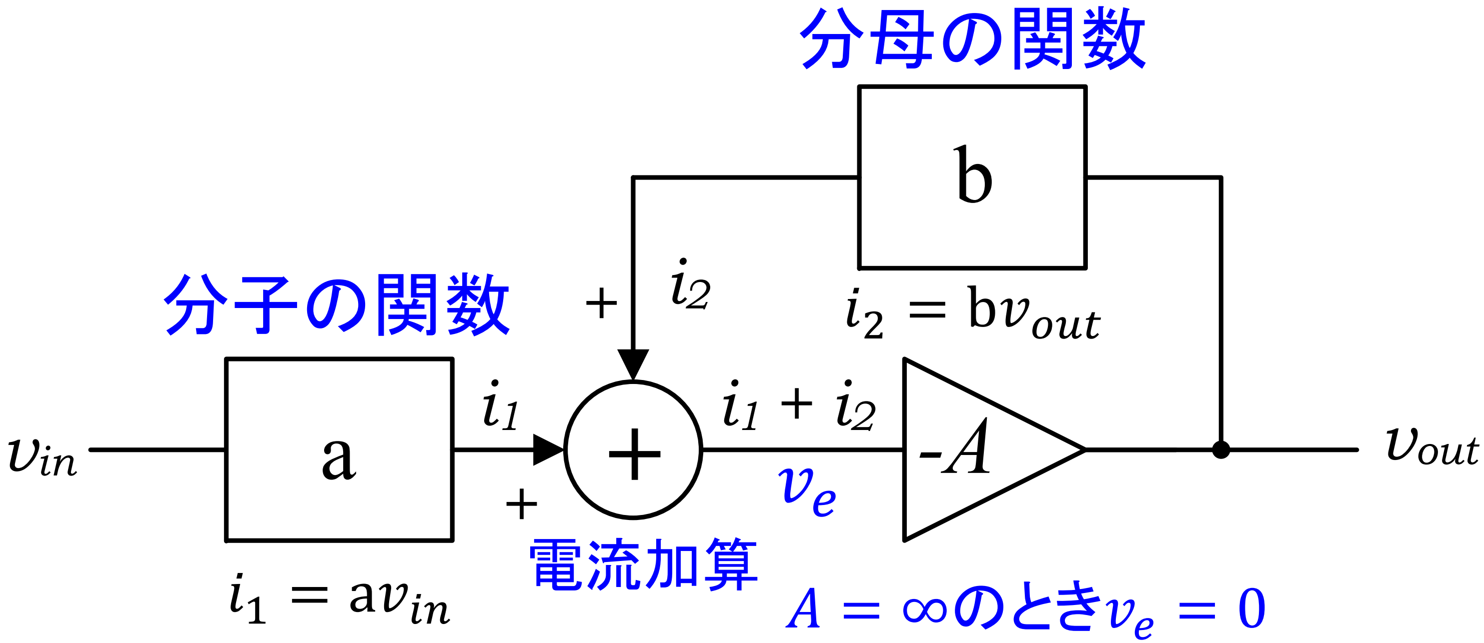
（変換係数sC）

使用部品

機能	要素回路	ブロックダイアグラム
電圧-電流変換 （電圧→電流）		
微分電圧-電流変換 （電圧→電流）		
電流加算 （電流→電流）		

（参考）R、C、増幅器を部品として用いた回路はRCアクティブフィルタと呼ばれる。この他にも様々な方式がある。例：Gm-C 、Switched capacitor、Switched current等。

伝達関数と回路の対応関係



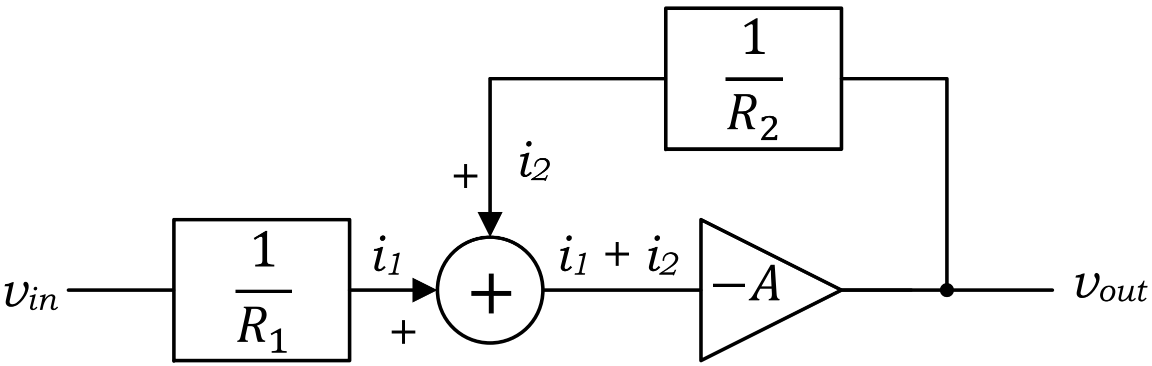
増幅器の入力インピーダンスが∞のとき、

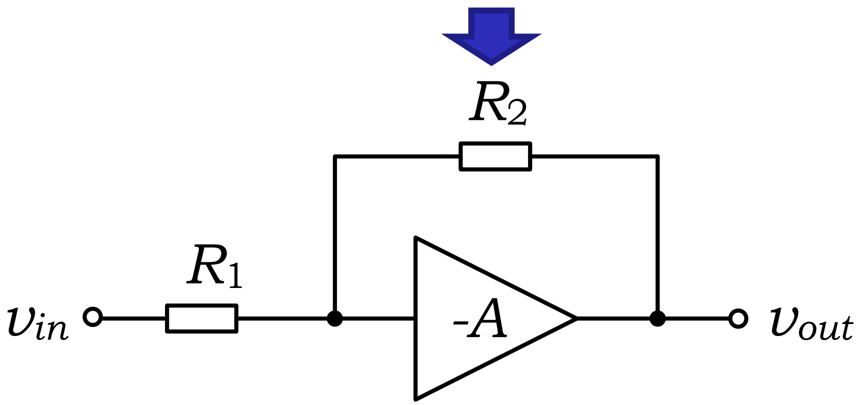
$$i_1 + i_2 = \mathrm{a}v_{in} + \mathrm{b}v_{out} = 0 \longrightarrow \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

入力信号側のブロックは分子、出力をフィードバックするブロックは分母の関数を表す。

定数

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = K$$（分子分母ともに定数）





増幅器の入力インピーダンスが∞のとき、

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$\frac{1}{R_1} v_{in} + \frac{1}{R_2} v_{out} = 0$$

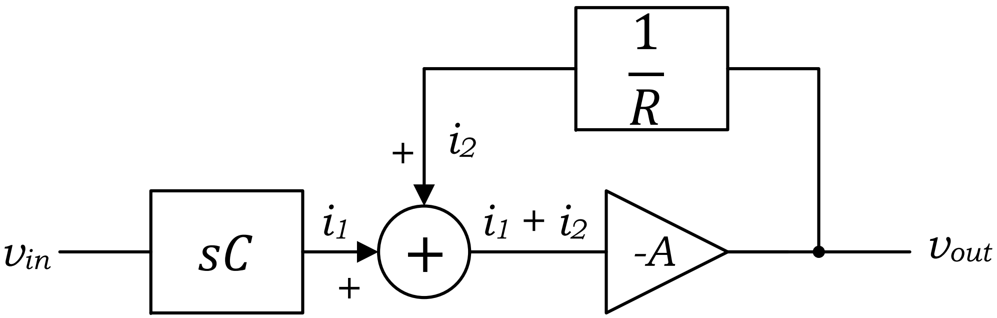
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

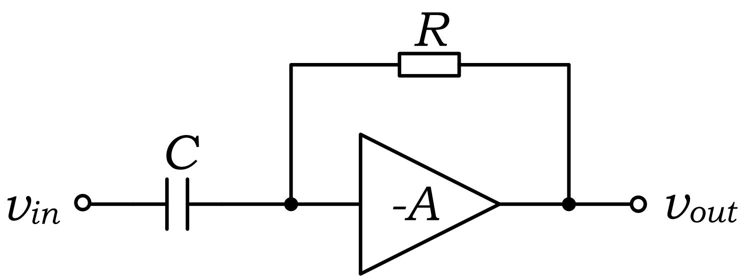
$Z_{in} \approx \infty$ $A \approx \infty$のとき、回路方程式から求めた周波数領域の伝達関数と一致することを確かめてみよう。

微分と積分

微分

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = Ks$$ （分子が定数項なしで1次）

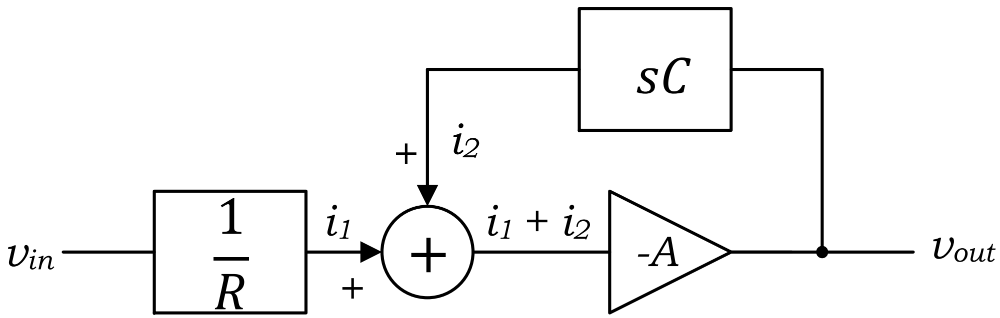


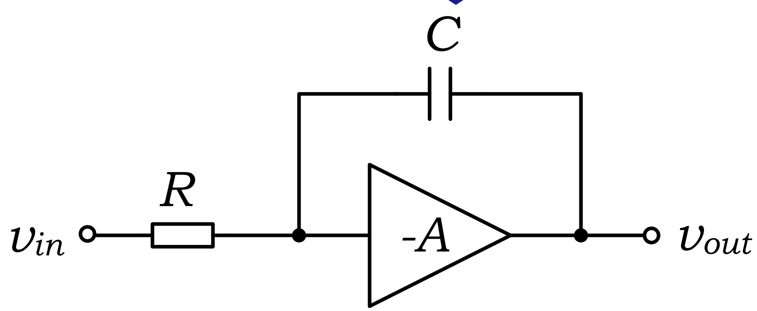


$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -CRs$$

積分

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{K}{s}$$ （分母が定数項なしで1次）





$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{1}{CR}\frac{1}{s}$$

微分と積分のボーデ線図

微分の伝達関数

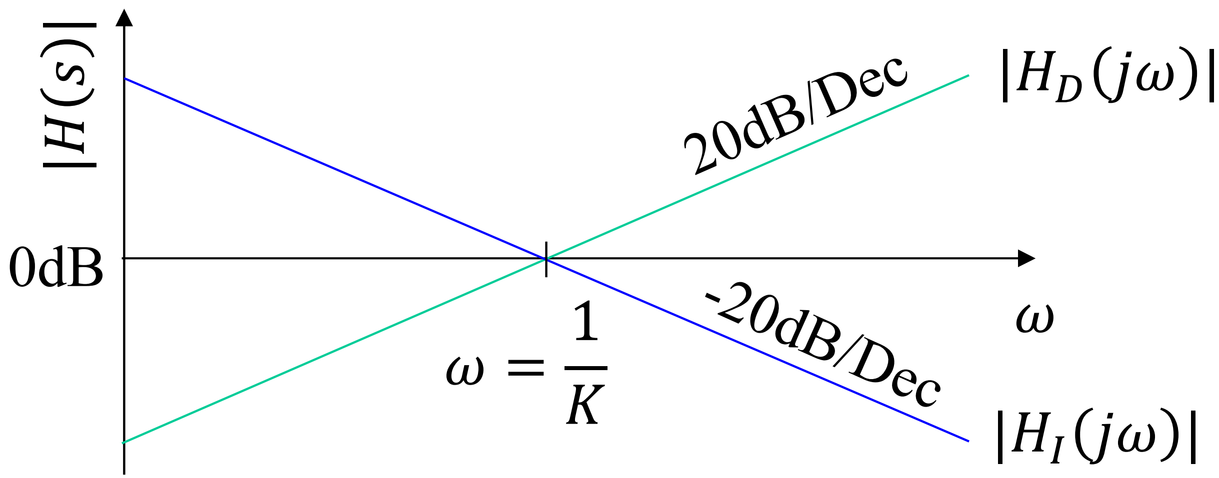
$$H_I(s) = sK$$

$$H_I(j\omega) = j\omega K$$

積分の伝達関数

$$H_D(s) = \frac{K}{s}$$

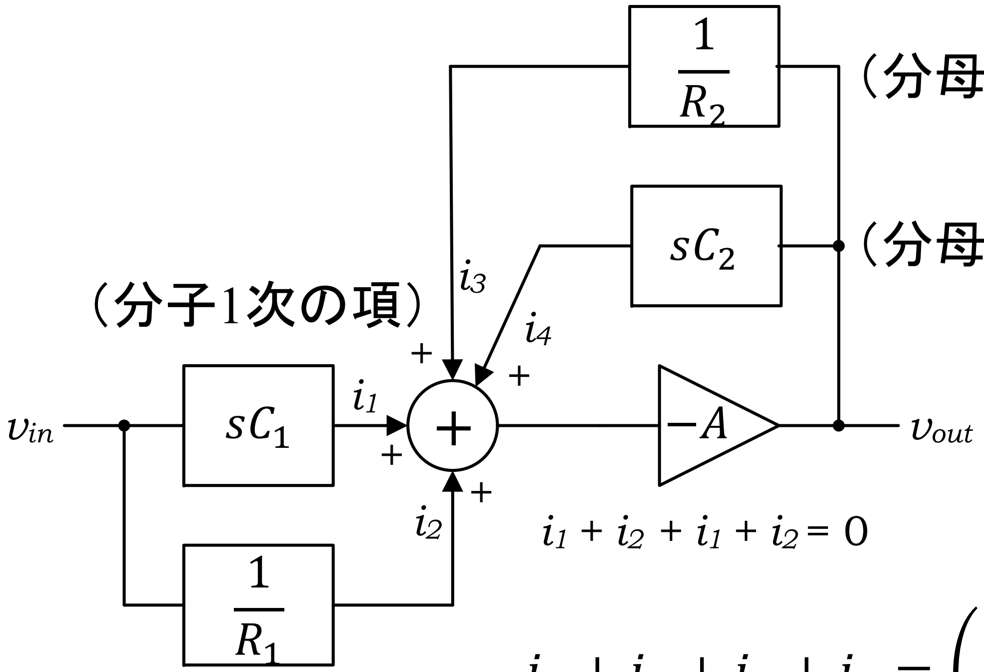
$$H_D(j\omega) = \frac{1}{j\omega K}$$

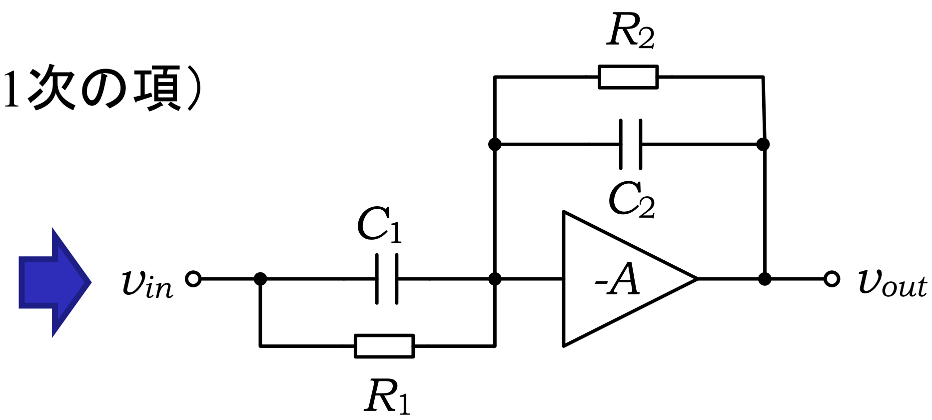


（参考）制御理論ではKは利得と呼ばれているが、時定数に相当する。

1次伝達関数

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{as+b}{cs+d}$$ （分子分母ともに1次関数）





（分子0次の項）

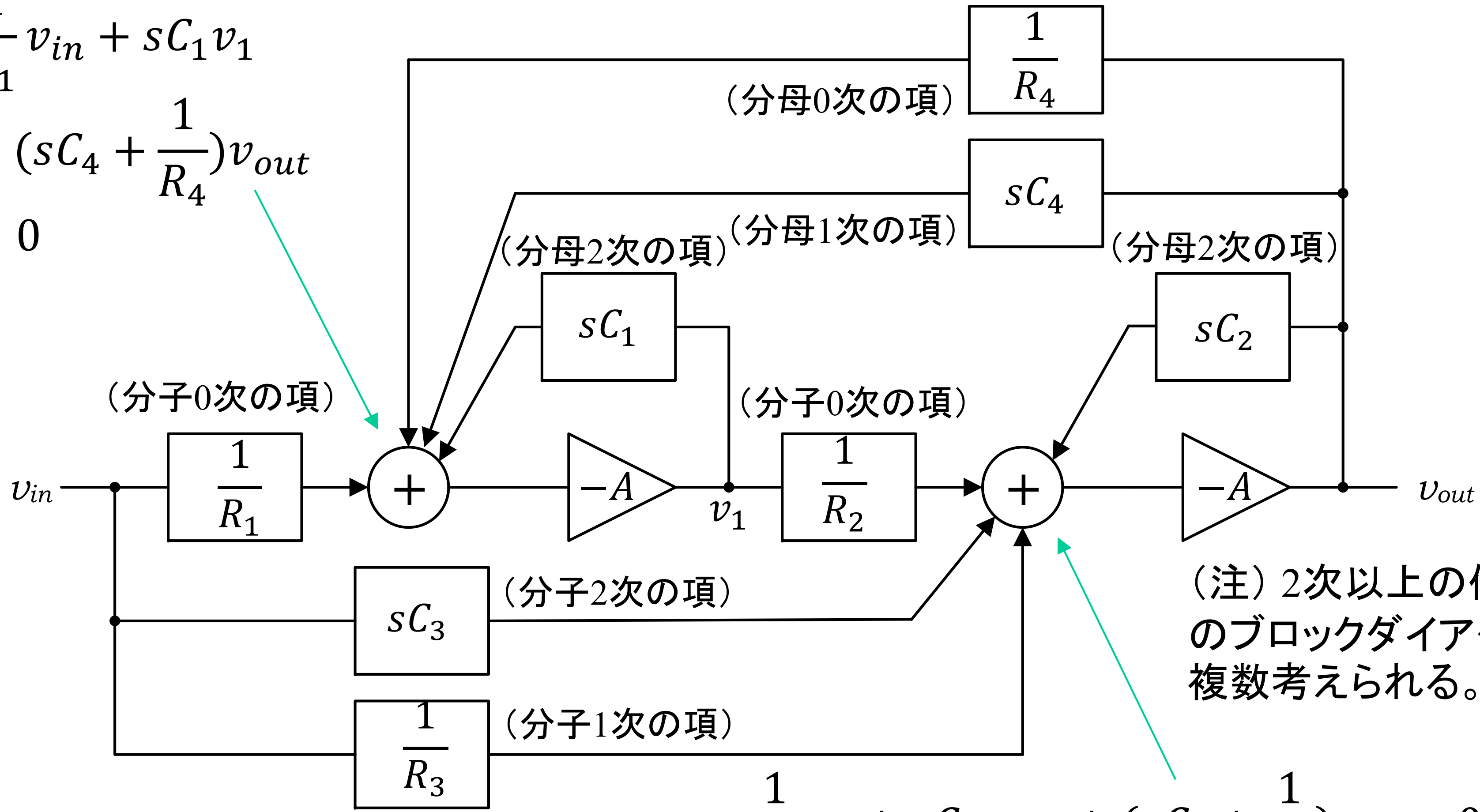
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \left(sC_1 + \frac{1}{R_1}\right) v_{in} + \left(sC_2 + \frac{1}{R_2}\right) v_{out} = 0$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{sC_1 + \frac{1}{R_1}}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{sC_1R_1 + 1}{sC_2R_2 + 1}$$

2次伝達関数のブロックダイアグラム

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = a\frac{bs^2 + cs + 1}{ds^2 + es + 1}$$ （分子分母ともに2次関数）

$$\frac{1}{R_1}v_{in} + sC_1v_1 + (sC_4 + \frac{1}{R_4})v_{out} = 0$$

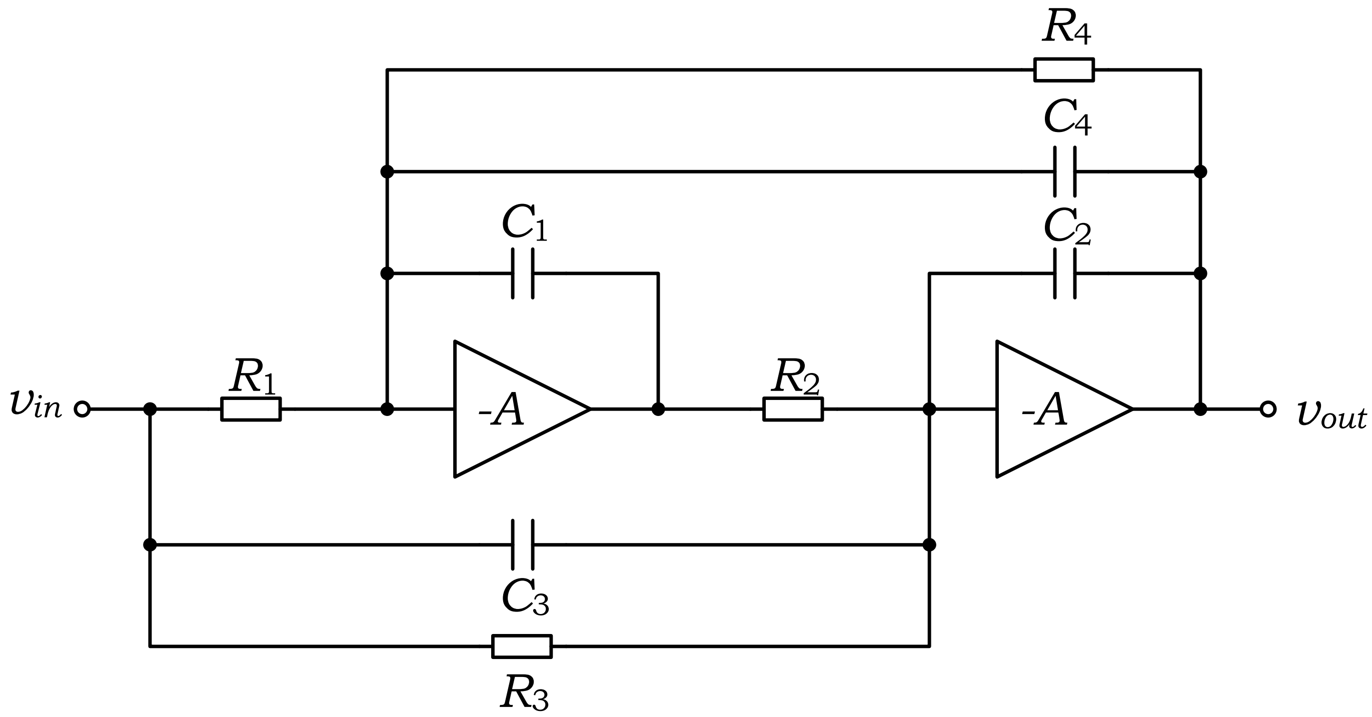


（注）2次以上の伝達関数のブロックダイアグラムは複数考えられる。

積分をフォーワードさせると分子の次数が上がる。

$$\frac{1}{R_2}v_1 + sC_2v_{out} + (sC_3 + \frac{1}{R_3})v_{in} = 0$$

２次伝達関数の回路



前ページのブロックダイアグラムより、

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1}v_{in} + sC_1v_1 + (sC_4 + \dfrac{1}{R_4})v_{out} = 0 \\ \dfrac{1}{R_2}v_1 + sC_2v_{out} + (sC_3 + \dfrac{1}{R_3})v_{in} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_4}{R_1}\frac{s^2C_1C_3R_1R_2 + sC_1\dfrac{R_1R_2}{R_3} - 1}{s^2C_1C_2R_2R_4 - sC_4R_4 - 1}$$

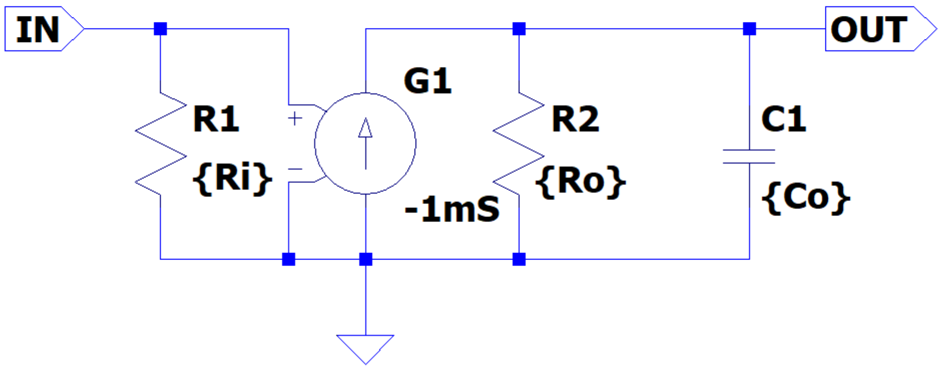
課題6.1

1. NFBによる周波数特性の変更を確認するため、シミュレーション手順2に示すCircuit1（上側）とCircuit2（下側）のシミュレーションを実施し、電圧利得の振幅特性と位相特性をグラフに示せ。
   – 回路図と結果のグラフを示すこと。
   – ネットリストを示すこと（レポートに貼り付けても、別ファイルでもよい）。
2. Circuit1、Circuit2のそれぞれについて、Rf = 2kΩ, 10kΩ, 100kΩの場合の直流利得、遮断周波数、GBPをシミュレーションで求めて表に示せ。
3. Circuit1、Circuit2のそれぞれについて、 Rf = 2kΩの場合の電圧利得の理想値（A = ∞）に対して、シミュレーション結果に含まれる相対誤差の絶対値の周波数依存性をグラフに示せ。
4. 正常にシミュレーションができていれば、Circuit1の誤差率は数10%以上になる。Circuit1の誤差の原因について考察せよ。
5. Circuit2の誤差は小さいが、ゼロにはならない。Circuit2の誤差の原因として考えられる要因を3つ示せ。シミュレーションの許容相対誤差のデフォルト値は、0.001であることも考慮すること。

シミュレーション手順1

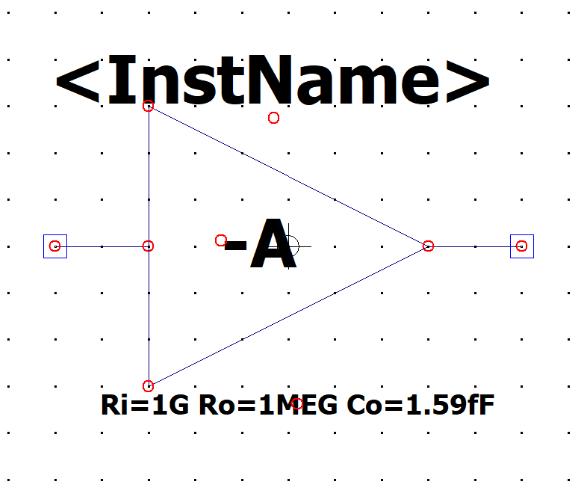
反転増幅回路モデルの作成

回路図



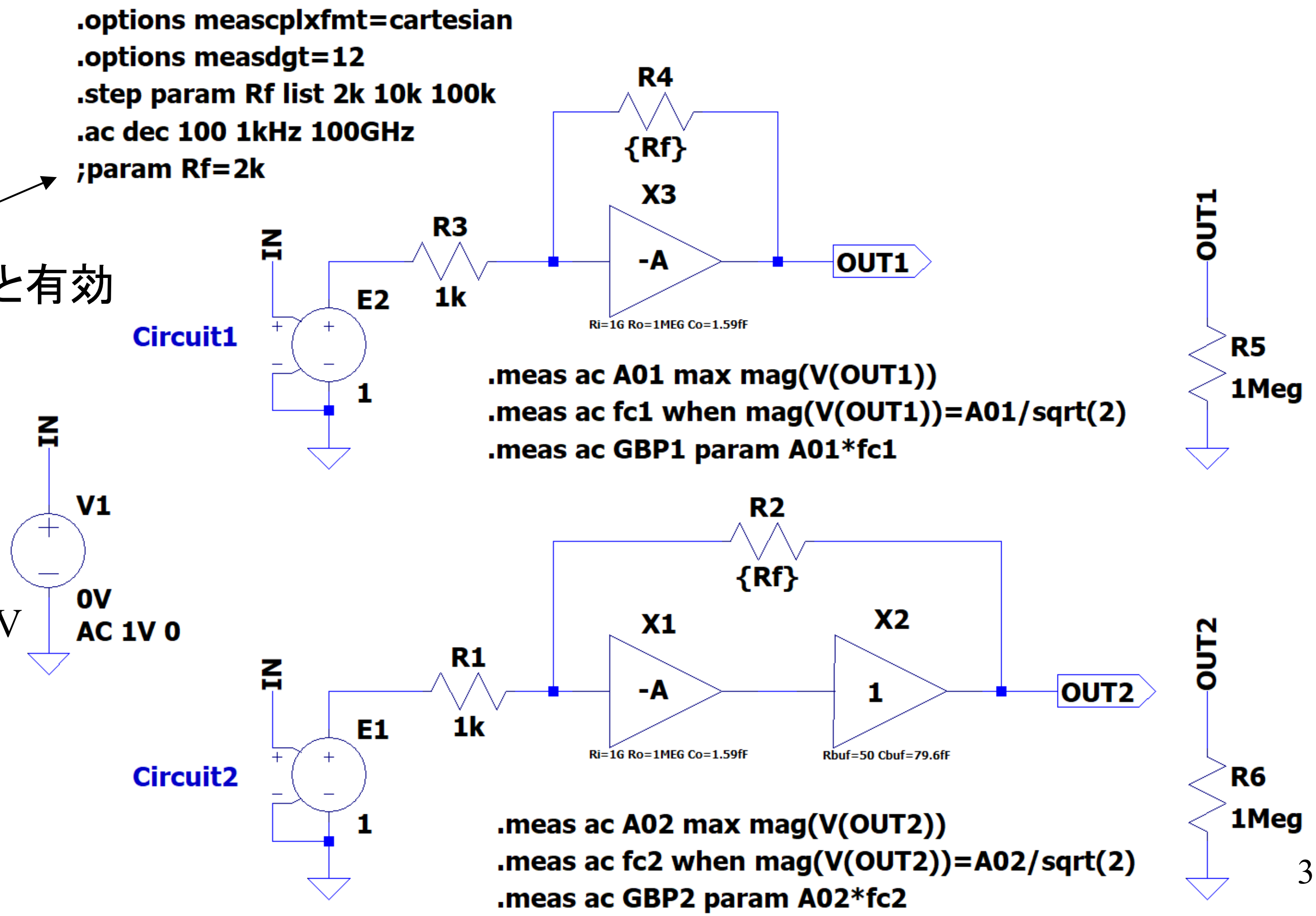
ファイル名：inv_amp.asc

シンボル



ファイル名：inv_amp.asy

シミュレーション手順2
測定回路の作成



; はコメント
（.に変更すると有効になる）

AC amplitude = 1V
AC phase = 0

シミュレーション手順3

1. 測定回路のシミュレーションの実行
   - .step param Rf list 2k 10k 100k により（;stepを.stepに変更）、R2, R4の値を3段階に変更
   - OUT1とOUT2の特性を見分けやすくするために、別のPaneに表示させる
   - シミュレーションが成功していれば、V(out1)は、Rfの値を変更しても特性がほとんど変わらないはずなので、この原因について考察すること
2. 電圧利得の誤差率の測定
   - .step param Rf list 2k 10k 100k の .step を ;stepに変更し（;はコメントを表す）、;param Rf=2k を .param Rf=2k に変更（コメントを外して実行させる）してから、シミュレーションを行う
   - 各Paneの左側目盛り数字を右クリックして、Representation欄をLogarithmicに設定
   - 各Paneの右側目盛り数字を右クリックして、Don't plot phaseボタンをクリック
   - グラフのV(out1)の文字を右クリックして、abs(mag(V(out1))-2)
   - V(out2)も同様に変更

（参考）R1, R2 = 2kΩなので、理論値（A = ∞）の電圧利得は、2（倍）である。
abs((mag(V(out1)/1-2)/2)により、V(out1)の相対誤差が求められる。

第6章のまとめ

- 増幅器にフィードバックを適用することにより各種の機能や特性の変更が可能になる
  - NFBにより、回路の安定化、伝達関数の設計などができる
  - PFBにより、双安定性、発振などの機能を実現することができる
- 増幅器にNFBを適用する場合は安定性に注意が必要
  - 周波数によって180度以上位相変化する増幅回路にNFBを加えると、異なる周波数でNFBとPFBが起こり、回路が安定動作しない
  - 回路を安定化するためには、ループ利得の位相余裕または利得余裕の条件を満足させる必要がある
  - 2段以上の増幅回路では、位相余裕、利得余裕を満足するために位相補償回路を追加する
- 増幅器、R、Cを組み合わせることにより、有理式で表される任意の伝達関数の特性を持つ回路を作成できる
  - 増幅器、R、Cを用いる回路方式以外にいろいろな方式がある