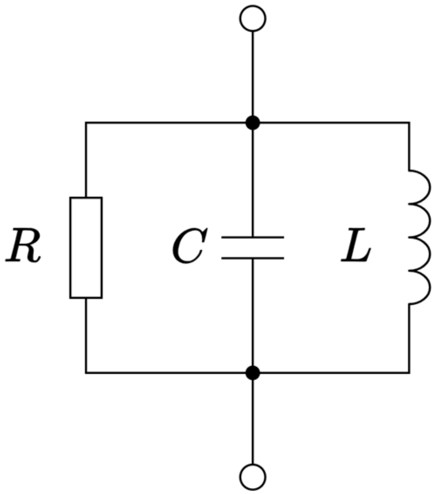
（参考）共振回路のQuality Factor

もう少し詳しく理解するために

並列共振回路のパラメータ



アドミタンス

$$Y=\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}=\frac{1}{R}\left\{1+jRC\left(\omega-\frac{1}{\omega LC}\right)\right\}=\frac{1}{R}\left\{1+jRC\left(\omega-\frac{\omega_r^2}{\omega}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{R}\left\{1+j\omega_r RC\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}=\frac{1}{R}\left\{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$

共振角周波数 $\omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Q値(Quality factor) $Q=\omega_r RC=R\sqrt{\frac{C}{L}}$

共振特性のパラメータ

$\omega=\omega_r$ のとき、共振状態となり $Y(\omega_r)=\frac{1}{R}$ （実数）

では、Q値は何を表すのか？

並列共振回路の周波数特性

$$Y = \frac{1}{R}\left\{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$

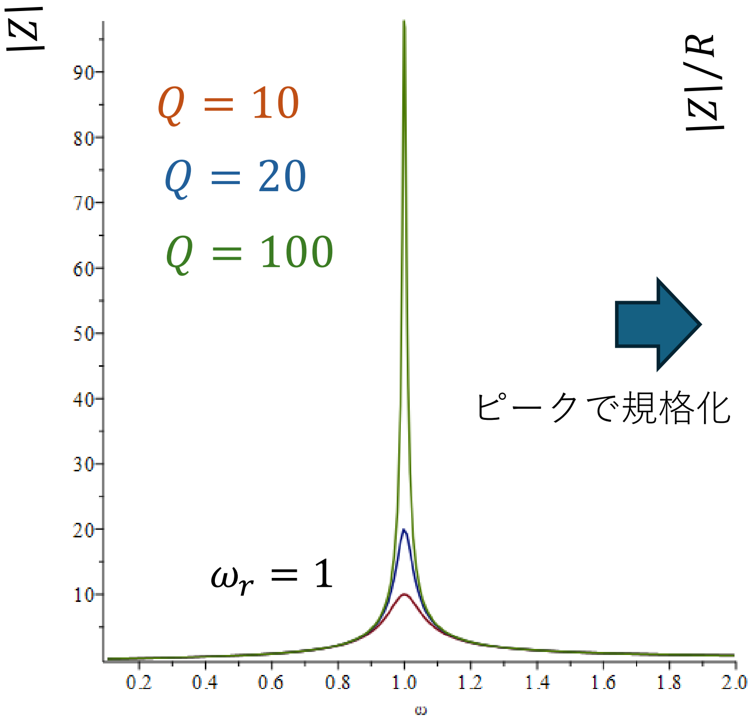
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}$$

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

$\omega = 0$ のとき、$|Z| = 0$

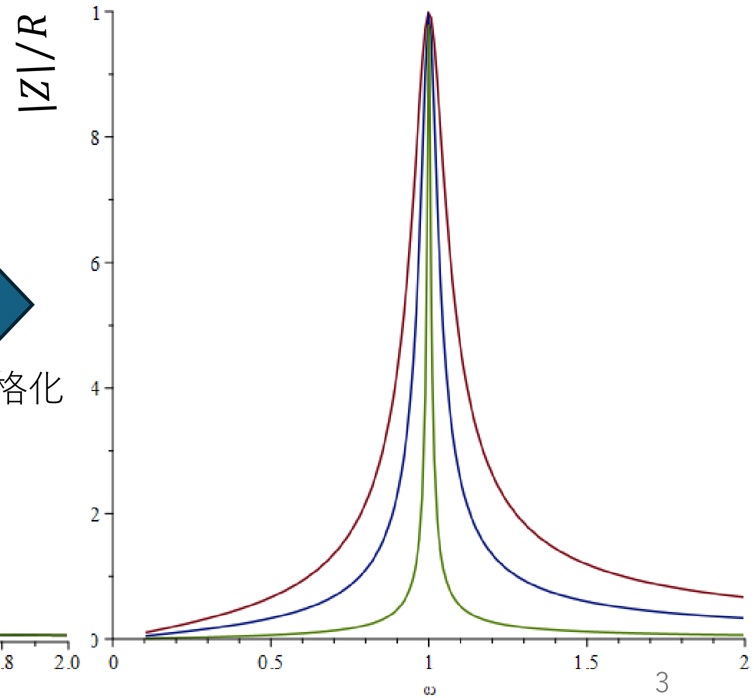
$\omega = \omega_r$ のとき、$|Z| = R$

$\omega \to \infty$ のとき、$|Z| = 0$

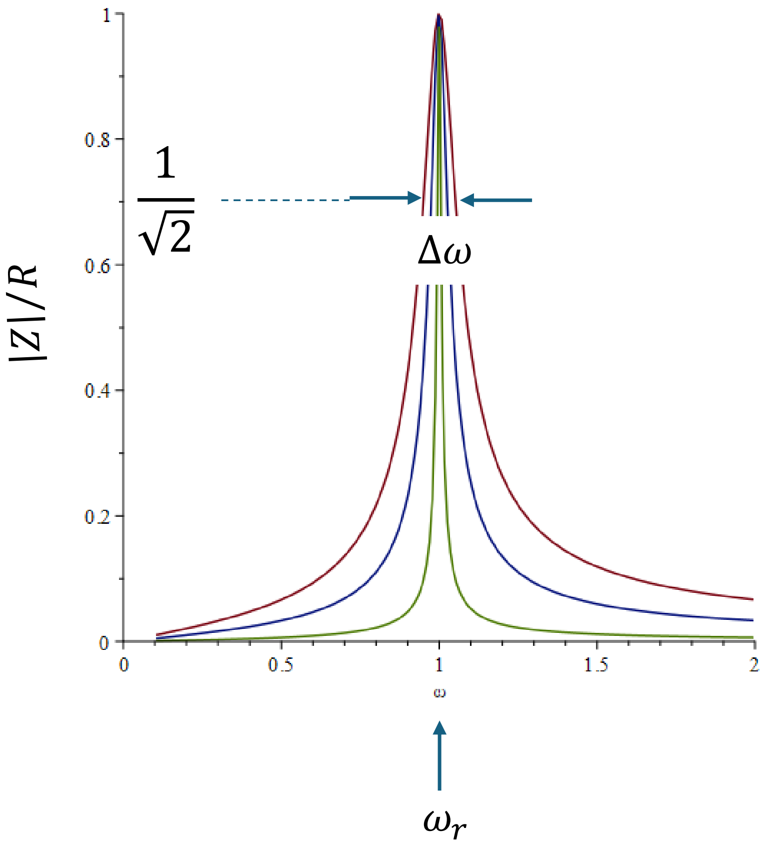


ピークで規格化

Qが大きいほどインピーダンスの絶対値の尖鋭度が強い



Q値の意味



$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 = 1$$ のとき、 $$|Z| = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

この条件を満たす角周波数の差を$\Delta\omega$とするとき、

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

（証明は次ページ参照）

Q値と$1/\sqrt{2}$幅の関係

$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2=1$ を満たす2つの角周波数をω_1とω_2とする。

$$\left[\begin{aligned} &\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)=-1 \qquad \text{(a)} \\ &\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=1 \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right.$$

(a) + (b) より

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=0$$

$$\omega_1\omega_2=\omega_r^2$$

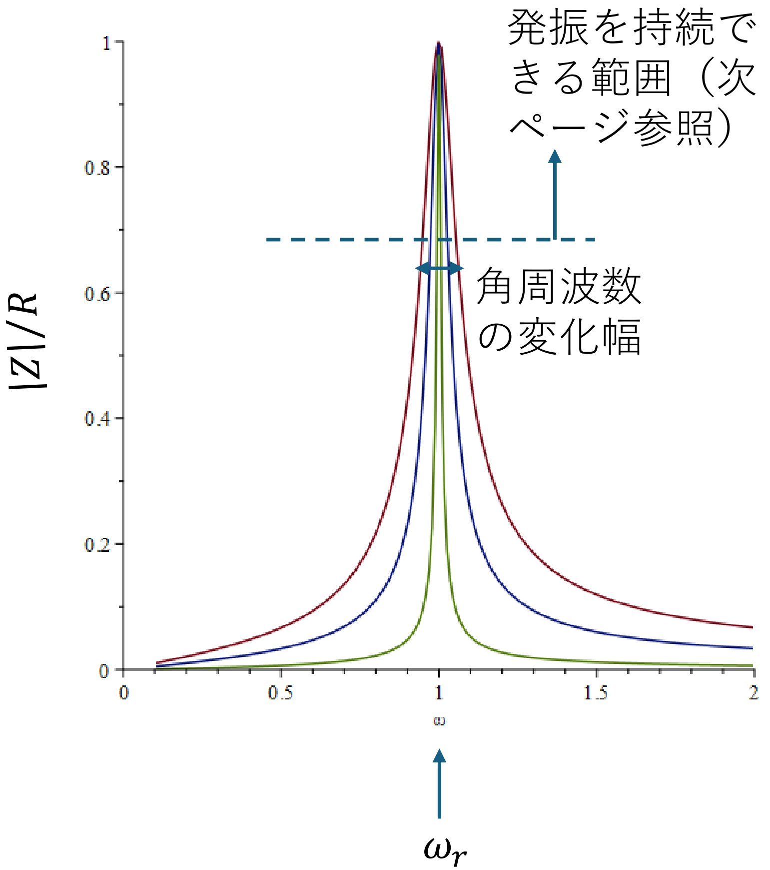
(a) - (b) より

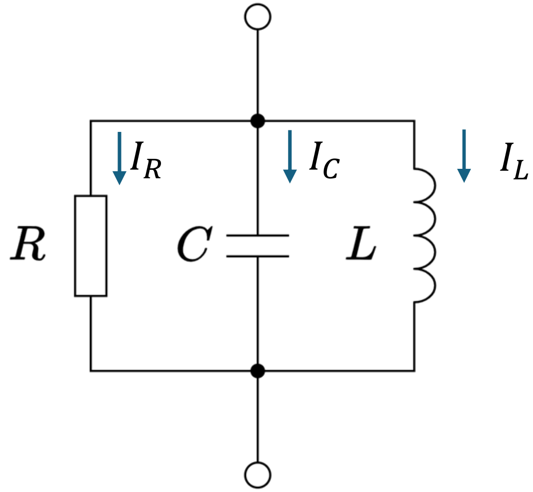
$$\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)-\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=-2$$

$$\frac{1}{\omega_r}(\omega_1-\omega_2)+\omega_r\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}=\frac{2}{\omega_r}(\omega_1-\omega_2)=-\frac{2}{Q}$$

$$\therefore Q=\frac{\omega_r}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

Q値の応用上の重要性





$\omega = \omega_r$のとき、

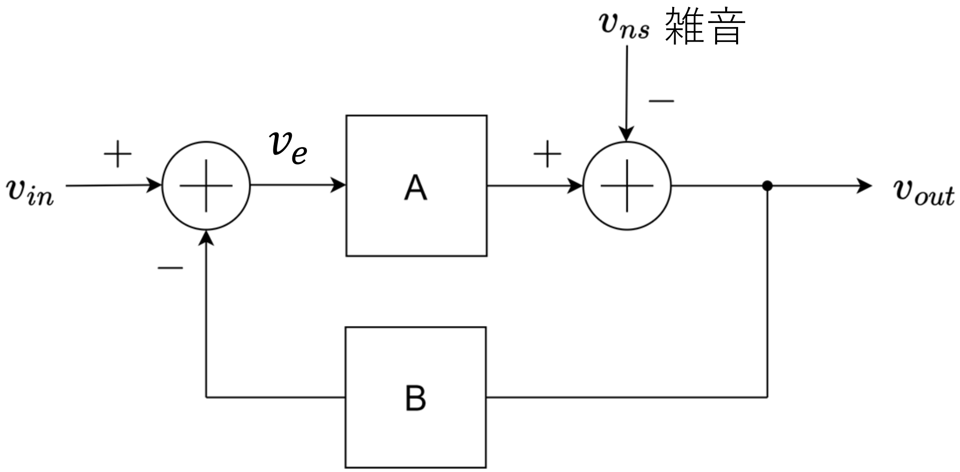
$$|I_R| = \frac{V}{R}, |I_C| = \omega_r CV, |I_L| = \frac{V}{\omega_r L}$$

$$\left|\frac{I_C}{I_R}\right| = \omega_r CR = Q$$

$$\left|\frac{I_L}{I_R}\right| = \frac{R}{\omega_r L} = \frac{\omega_r R}{\omega_r^2 L} = \omega_r CR = Q,$$

- Q値は、共振状態におけるRとLの電流比、またはRとCの電流比を表している。電力効率よく発振させるためには高Qが必要
- 一時的に発振条件を外れても、発振は持続するため$\omega = \omega_r$の近傍の角周波数が変動する。Q値が大きい（$\Delta\omega$が小さい）ほど、周波数の変動幅が狭い。

（参考）発振条件が揺らぐ原因



$$\begin{cases} v_{out} = Av_e + v_{ns} \\ v_e = v_{in} + Bv_{out} \end{cases}$$

$$v_{out} = \frac{A}{1 - AB} v_{in} + \frac{1}{1 - AB} v_{ns}$$

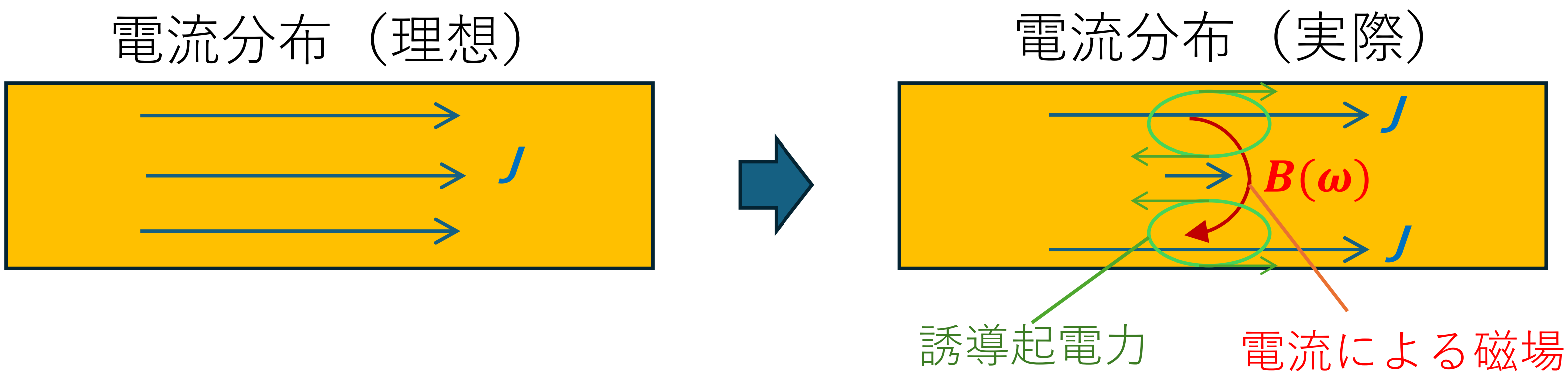
$v_{in} = 0$ のとき、

$$v_{out} = \frac{1}{1 - AB} v_{ns}$$

現実の回路では、雑音が $v_{ns} \neq 0$ であるため、

$AB \approx 1$であれば、出力が維持される。このため、雑音の振幅と位相の変化に対して、一時的に発振周波数が変動する。

配線抵抗の発生を防ぐ方法

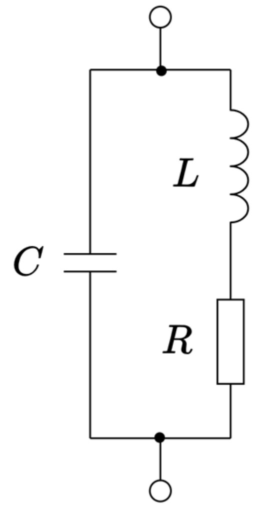


交流電流は、導線内に誘導起電力を発生させるため表面に導線表面に集まって流れる（表皮効果）。高周波になるほど、誘導起電力が大きくなるため、表面の狭い範囲に電流が流れ、抵抗が大きくなる。

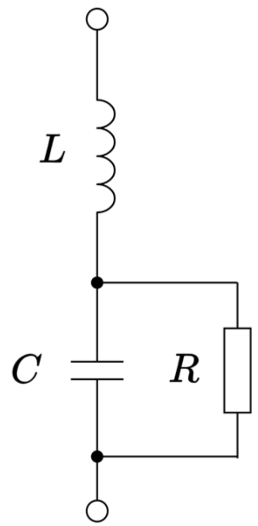
対策例

・無線通信：多数の細線を並列接続して電流が流れる表面積を増やす
・電力送電：直流送電により誘導起電力をなくす

一般的な共振回路の$\boldsymbol{\omega_r}$



(A) Qが低いインダクタ



(B) リーク電流があるキャパシタ

(A) の共振回路について解析を試みる

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \frac{\omega^2 C L^2 + R^2 C - L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(1 + j\omega \frac{\omega^2 C L^2 + R^2 C - L}{R}\right)$$

虚部 = 0 より共振角周波数ω_rを求める

$$R^2 C + \omega_r^2 C L^2 - L = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

共振角周波数$\omega = \omega_r$におけるアドミタンス

$$Y(\omega_r) = \frac{R}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = \frac{RC}{L}$$

一般的な共振回路の$\mathbf{Q}$の計算

一般的なRLC回路の共振周波数の計算は面倒（虚部=0と絶対値ピーク位置がずれる）。
以下のようにQを定義して求める。

$$Q=\frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r}=\frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dZ}{d\omega}\right)}{Z}\right|_{\omega=\omega_r}$$

$$Y=j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L}=j\omega C+\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}+j\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)\xrightarrow{\omega=\omega_r}\frac{RC}{L}$$

$$\frac{dY}{d\omega}=\frac{-2\omega L^2R}{(R^2+\omega^2L^2)^2}+j\frac{2\omega L^3}{(R^2+\omega^2L^2)^2}\xrightarrow{\omega=\omega_r}\frac{-2L^2R}{\left(\frac{L}{C}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}+j\frac{2L^3}{\left(\frac{L}{C}\right)^2}\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}\right)$$

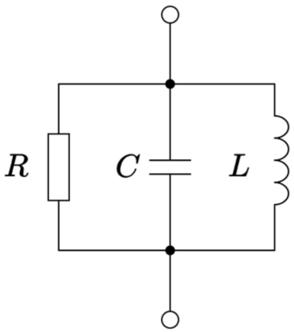
$$\left.\frac{\frac{dY}{d\omega}}{Y}\right|_{\omega=\omega_r}=-2LC\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}+j2\frac{L^2C}{R}\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}\right)\quad\longrightarrow\quad\left|\frac{\left|\frac{dY}{d\omega}\right|}{|Y|}\right|_{\omega=\omega_r}=2\sqrt{\frac{L^2}{R^2}-CL}$$

$$Q=\frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r}=\omega_r\sqrt{\frac{L^2}{R^2}-CL}$$

（練習問題）

RLC並列共振回路について、 $Q = \frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r}$

を用いてQ値を求め、スライド２の値と一致することを示せ。



$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R}\left\{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$